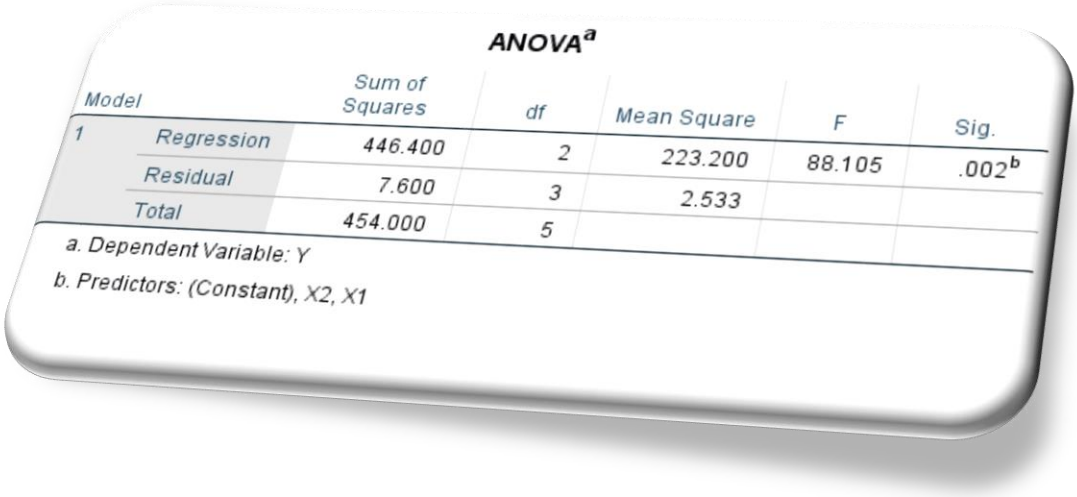
جامعة الشاذلي بن جديد - الطارف
UNIVERSITE CHADLI BENDJEDID - ELTARF

6 السداسي 2025-2026

اقتصاد قياسي ومالي

- المحاضرة 06

تقدير معلمات نموذج الإنحدار الخطي المتعدد باستعمال المصفوفات



ANOVA[a]

Model		Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.
1	Regression	446.400	2	223.200	88.105	.002[b]
	Residual	7.600	3	2.533		
	Total	454.000	5			

a. Dependent Variable: Y

b. Predictors: (Constant), X2, X1

صورة تمثل الدرس/ المحور

الأساتذة المسؤولين			
الاسم واللقب	الرتبة	الكلية	البريد الالكتروني
محمد لمين ميرة	MCB	علوم اقتصادية SEGC	lamine.mira4@gmail.com
الطلبة المعنيين			
الكلية	القسم	السنة	تخصص
علوم اقتصادية SEGC	العلوم الاقتصادية	سنة ثالثة	اقتصاد نقدي ومالي واقتصاد وتسيير المؤسسات

أهداف المحاضرة 06:

- تقدير معلمات نموذج الإنحدار الخطي المتعدد باستعمال المصفوفات.
- تلخيص الخطوات الرئيسية لطريقة المصفوفات.

مراحل سير المحاضرة:

- خطوات تقدير معلمات النموذج بإستعمال المصفوفات؛
- حل الوضعية لفهم مختلف خطوات التقدير.

نعتمد على وضعية المحاضرة السابقة للتحقق من النتائج:

ليكن النموذج التالي ذو المتغير التابع Y_i والمتغيرات المستقلة X_{1i} وX_{2i} لـ 06 مشاهدات فقط (من أجل التبسيط):

i	X_1	X_2	Y_i
1	1	2	10
2	2	4	18
3	3	6	20
4	4	8	24
5	5	10	28
6	9	12	38

العمل المطلوب:

- قدر معادلة نموذج الإنحدار الخطي المتعدد باستعمال المصفوفات

خطوات تقدير معمات نموذج الإنحدار الخطي المتعدد باستعمال المصفوفات :

من بين أهم الطرق المستعملة في تقدير معلمات نموذج الإنحدار الخطي المتعدد طريقة المصفوفات، حيث تمر هذه الطريقة بالخطوات التالية:

1) كتابة النموذج في شكله المصفوفي.
2) كتابة قانون المصفوفة المقدرة لمعلمات النموذج.
3) حساب $X'X$.
4) حساب $(X'X)^{-1}$ وتمر بأربعة مراحل:
   - حساب المحدد.
   - حساب المصفوفة المرافقة.
   - ضرب المصفوفة المرافقة في +، −، +...الخ.
   - ضرب المصفوفة الناتجة في مقلوب المحدد.

5) حساب X'Y.

6) استخراج المعلمات المقدرة لنموذج الإنحدار الخطي المتعدد.

ومن أجل الفهم الجيد نقوم بتطبيق هذه الخطوات على الوضعية السابقة.

1. النموذج في شكله المصفوفي:

في الواقع إن المعادلة الإنحدارية هي جملة لمجموعة من المعادلات عددها 6 (حجم العينة) وهي كالتالي:

$$10 = \hat{\alpha} + \widehat{\beta_1} *(1) + \widehat{\beta_2} *(2) + \varepsilon_1$$

$$18 = \hat{\alpha} + \widehat{\beta_1} *(2) + \widehat{\beta_2} *(4) + \varepsilon_2$$

$$20 = \hat{\alpha} + \widehat{\beta_1} *(3) + \widehat{\beta_2} *(6) + \varepsilon_3$$

$$24 = \hat{\alpha} + \widehat{\beta_1} *(4) + \widehat{\beta_2} *(8) + \varepsilon_4$$

$$28 = \hat{\alpha} + \widehat{\beta_1} *(5) + \widehat{\beta_2} *(10) + \varepsilon_5$$

$$38 = \hat{\alpha} + \widehat{\beta_1} *(9) + \widehat{\beta_2} *(12) + \varepsilon_6$$

من المعادلات التالية يمكن اسخراج الشكل المصفوفي للنموذج:

$$\begin{pmatrix}10\\18\\20\\24\\28\\38\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&1&2\\1&2&4\\1&3&6\\1&4&8\\1&5&10\\1&9&12\end{pmatrix} * \begin{pmatrix}\hat{\alpha} = \hat{\beta}_0\\\hat{\beta}_1\\\hat{\beta}_2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\varepsilon_1\\\varepsilon_2\\\varepsilon_3\\\varepsilon_4\\\varepsilon_5\\\varepsilon_6\end{pmatrix}$$

2. قانون المصفوفة المقدرة لمعلمات النموذج تأخذ الشكل التالي:

$$\hat{\beta} = (X'X)^{-1}.\ (X'Y)$$

حيث أن 'X هو منقول المصفوفة X (الأعمدة تصبح أسطر)

3. حساب X'X:

$$X'X = \begin{pmatrix}1&1&1&1&1&1\\1&2&3&4&5&9\\2&4&6&8&10&12\end{pmatrix} * \begin{pmatrix}1&1&2\\1&2&4\\1&3&6\\1&4&8\\1&5&10\\1&9&12\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}6&24&42\\24&136&218\\42&218&364\end{pmatrix}$$

في المصفوفة الناتجة لاحظ وجود التناضر بالنسبة للقطر الرئيسي الذي يضم الأعداد 6، 136، 364

في عملية الضرب دائما نضرب سطر المصفوفة الأولى في عمود المصفوفة الثانية

4) حساب معكوس المصفوفة الناتجة $(X'X)^{-1}$ ويمر بأربعة مراحل:

أولا: حساب المحدد

لحساب المحدد نستعمل المصفوفة الناتجة ثم نضيف لها أول عمودين منها وذلك كما يلي:

6	24	42	6	24
24	136	218	24	136
42	218	364	42	218

المحدد = مجموع جداء الأقطار الرئيسية – مجموع جداء الأقطار الثانوية

لاحظ وجود ثلاثة أقطار رئيسية (القطر الرئيسي الأول هي الأرقام الملونة باللون الأخضر والثاني هي الأرقام الملونة باللون الأحمر والثالث الأرقم الملونة باللون الأزرق) وثلاثة أقطار ثانوية (القطر الثانوي الأول هي الأرقام المضللة باللون الأصفر، والثاني هي الأرقام المضللة باللون الرمادي والثالث هي الأرقم المضللة باللون الأزرق)

المحدد = (364*136*6) + (42*218*24) – (218*24*42) – (364*24*24) – (218*218*6) – (42*136*42)

المحدد= 1800

ثانيا: حساب المصوفة المرافقة

- لإستخراج المصفوفة المرافقة وجب استعمال المصفوفة السابقة الناتجة X'X.
- المصفوفة المرافقة تضم نفس عدد أرقام المصفوفة X'X.
- كل رقم في المصفوفة X'X يتم مسح سطره وعموده ثم نحسب جداء القطر الرئيسي ناقص القطر الثانوي لنتحصل على العدد الجديد.

بعد الحساب نتحصل على المصفوفة المرافقة التالية: $\begin{pmatrix} 1980 & -420 & -480 \\ -420 & 420 & 300 \\ -480 & 300 & 240 \end{pmatrix}$

لاحظ وجود تناضر بالنسبة للقطر الرئيسي في المصفوفة المرافقة.

ثالثا: نقوم بضرب المصفوفة المرافقة في الإشارات التالية كل حسب موضعه:

$$\begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix}$$

وبالتالي نتحصل على المصفوفة التالية:

$$\begin{pmatrix} 1980 & 420 & -480 \\ 420 & 420 & -300 \\ -480 & -300 & 240 \end{pmatrix}$$

لاحظ أنه يوجد كذلك تناضر في المصفوفة الناتجة.

رابعا : ضرب المصفوفة الناتجة في مقلوب المحدد

وتمثل أخر عملية في الخطوة الرابعة، حيث يتم فيها قسمة جميع أعداد المصفوفة الناتجة على المحدد لنتحصل على معكوس المصفوفة X'X أي نتحصل على $(X'X)^{-1}$.

$$\begin{pmatrix} 1.1 & 0.23333 & -0.2667 \\ 0.23333 & 0.233333 & -0.1667 \\ -0.2667 & -0.1667 & 0.133333 \end{pmatrix}$$

5. حساب X'Y:

$$X'Y = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 9 \\ 2 & 4 & 6 & 8 & 10 & 12 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 10 \\ 18 \\ 20 \\ 24 \\ 28 \\ 38 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 138 \\ 684 \\ 1140 \end{pmatrix}$$

استخراج المعلمات المقدرة لنموذج الإنحدار الخطي المتعدد:

$$\hat{\beta} = (X'X)^{-1}.(X'Y)$$

$$\hat{\beta} = \begin{pmatrix} 1.1 & \mathbf{0.23333} & \mathbf{-0.2667} \\ \mathbf{0.23333} & 0.233333 & \mathbf{-0.1667} \\ \mathbf{-0.2667} & -0.1667 & 0.133333 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 138 \\ 684 \\ 1140 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{\alpha} = \hat{\beta}0 = 7.4 \\ \hat{\beta}1 = 1.8 \\ \hat{\beta}2 = 1.2 \end{pmatrix}$$

لاحظ أنه بتطبيق طريقة المصفوفات أو طريقة المربعات الصغرى تحصلنا على نفس النتائج لنموذج الإنحدار الخطي المتعدد ومنه يمكن كتابة المعادلة الإنحدارية كما يلي:

$$Y_i = 7.4 + 1.8 * X_{i1} + 1.2 * X_{i2} + \varepsilon$$