السلسلة رقم 01: تقدير معلمات نموذج الإنحدار البسيط باستعمال طريقة المربعات الصغرى

التمرين رقم 01: لتكن لديك المعطيات التالية والخاصة بالعلاقة الخطية بين المتغير التابع Y والمتغير المستقل X:

i	1	2	3	4	5
X_i	2	3	1	5	9
Y_i	4	7	3	9	17

العمل المطلوب:

1) قدر معادلة نموذج الإنحدر الخطي من الشكل $Y_i = \hat{\alpha} + \hat{\beta}X_i + \varepsilon$ باستعمال طريقة المربعات الصغرى:
   - أ- باستعمال القانون العام؛
   - ب- باستعمال القانون المختصر.
2) ما هي قيمة Y في حالة X تساوي 10.

التمرين رقم 02: فيما يلي بيانات عن كمية البروتين بالجرام التي يحتاجها العجل الرضيع، ومقدار الزيادة في وزن العجل بالكيغ، وذلك لعينة من العجول الرضيعة عددها 10.

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
الطاقة	10	11	14	15	20	25	46	50	59	70
الانتاج	10	10	12	12	13	13	19	15	16	20

العمل المطلوب:

1) أرسم نقاط الانتشار، وما هو توقعك لشكل العلاقة؟
2) قدر معادلة انحدار الوزن على كمية البروتين.
3) فسر معادلة نموذج الإنحدار.
4) ما هو مقدار الزيادة في الوزن عند إعطاء العجل 50 جرام من البروتين؟ وما هو مقدار الخطأ العشوائي؟
5) أرسم معادلة الانحدار على نقاط الانتشار.

التمرين رقم 03: لتكن لديك المعطيات التالية والخاصة بالعلاقة الخطية بين المتغير التابع Y والمتغير المستقل X:

i	1	2	3	4	5	6
X_i	5	6	6	7	8	10
Y_i	2	2	3	4	7	6

العمل المطلوب: قدر معادلة نموذج الإنحدر الخطي من الشكل $Y_i = \hat{\alpha} + \hat{\beta}X_i + \varepsilon$ باستعمال طريقة المربعات الصغرى.

$\hat{\alpha}$	$\hat{\beta}$	
$\bar{Y} - \hat{\beta} * \bar{X}$	$\frac{\Sigma(Xi - \bar{X}) * (Yi - \bar{Y})}{\Sigma(Xi - \bar{X})^2}$	$\frac{n * \Sigma XiYi - \Sigma Xi * \Sigma Yi}{n * \Sigma Xi^2 - (\Sigma Xi)^2}$

--حل السلسلة رقم 01 --

التمرين رقم 01:

- تقدير $\widehat{\beta}$ باستعمال القانون العام:

X_i^2	$X_i * Y_i$	Y_i	X_i	i
4	8	4	2	1
9	21	7	3	2
1	3	3	1	3
25	45	9	5	4
81	153	17	9	5
120	230	40	20	المجموع

$$\hat{\beta} = \frac{n * \Sigma XiYi - \Sigma Xi * \Sigma Yi}{n * \Sigma Xi^2 - (\Sigma Xi)^2}$$

$$\hat{\beta} = \frac{5 * 230 - 20 * 40}{5 * 120 - 400}$$

$$\hat{\beta} = \frac{1150-800}{600-400} = \frac{350}{200} = 1.75$$

- تقدير $\widehat{\beta}$ باستعمال القانون المختصر:

$(X_I - \bar{X})^2$	$(X_I - \bar{X}) * (Y_I - \bar{Y})$	$Y_I - \bar{Y}$	$X_I - \bar{X}$	Y_I	X_I	i
4	8	−4	−2	4	2	1
1	1	−1	−1	7	3	2
9	15	−5	−3	3	1	3
1	1	1	1	9	5	4
25	45	9	5	17	9	5
40	70	/	/	40	20	المجموع

$$\hat{\beta} = \frac{\Sigma(Xi-\bar{X})*(Yi-\bar{Y})}{\Sigma(Xi-\bar{X})^2} = \frac{70}{40} = 1.75$$

- تقدير $\widehat{\alpha}$ وكتابة المعادلة الانحدارية:

$$\hat{\alpha} = \bar{Y} - \hat{\beta} * \bar{X}$$

$$\hat{\alpha} = \frac{40}{5} - 1.75 * \frac{20}{5}$$

$$\hat{\alpha} = 8 - 1.75 * 4$$

$$\hat{\alpha} = 8 - 7 = 1$$

ومنه يمكن كتابة المعادلة الانحدارية كما يلي:

$$Y_i = 1 + 1.75X_i$$

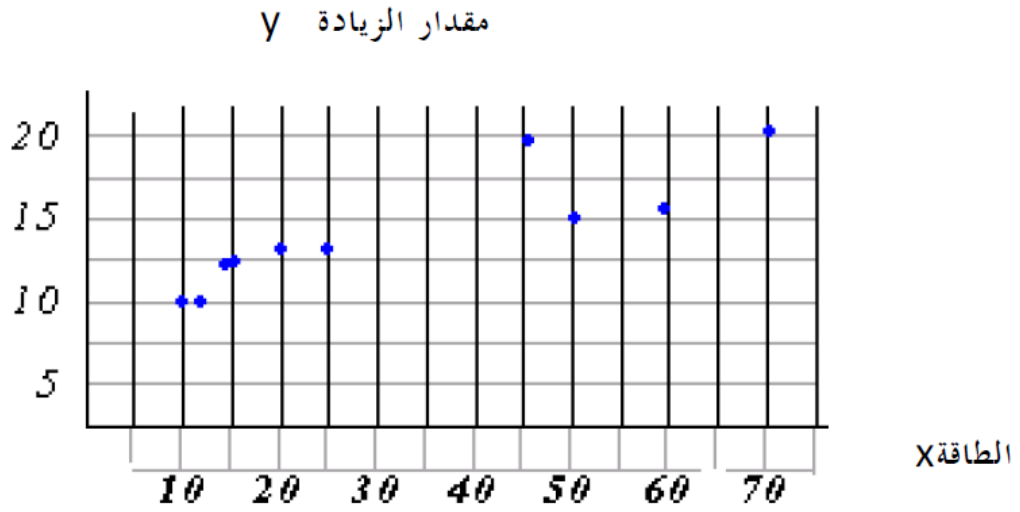
حساب قيمة Y في حالة X تساوي 10:

$Y_i = 1 + 1.75 * (10)$

$Y_i = 18.5$

التمرين رقم 02:

نقاط الانتشار:



من المتوقع أن يكون لكمية البروتين أثر طردي (إيجابي) على مقدار الزيادة في الوزن.

- **تقدير $\widehat{\beta}$ باستعمال القانون العام:**

X_i^2	$X_i * Y_i$	Y_i	X_i	i
100	100	10	10	1
121	110	10	11	2
196	168	12	14	3
225	180	12	15	4
400	260	13	20	5
625	325	13	25	6
2116	874	19	46	7
2500	750	15	50	8
3481	944	16	59	9
4900	1400	20	70	10
14664	5111	140	320	المجموع

$$\hat{\beta} = \frac{n * \Sigma XiYi - \Sigma Xi * \Sigma Yi}{n * \Sigma Xi^2 - (\Sigma Xi)^2}$$

$$\hat{\beta} = \frac{10 * 5111 - 320 * 140}{10 * 14664 - 102400}$$

$\hat{\beta}= \frac{6310}{44240} = 0.1426$

- **تقدير $\hat{\beta}$ باستعمال القانون المختصر:**

$(X_i - \bar{X})^2$	$(X_i - \bar{X}) * (Y_i - \bar{Y})$	$Y_i - \bar{Y}$	$X_i - \bar{X}$	Y_i	X_i	i
484	88	−4	−22	10	10	1
441	84	−4	−21	10	11	2
324	36	−2	−18	12	14	3
289	34	−2	−17	12	15	4
144	12	−1	−12	13	20	5
49	7	−1	−7	13	25	6
196	70	5	14	19	46	7
324	18	1	18	15	50	8
729	54	2	27	16	59	9
1444	228	6	38	20	70	10
4424	631	/	/	140	320	المجموع

$\hat{\beta} = \frac{\Sigma(Xi-\bar{X})*(Yi-\bar{Y})}{\Sigma(Xi-\bar{X})^2} = \frac{631}{4424} = 0.1426$

- **تقدير $\hat{\alpha}$ وكتابة المعادلة الانحدارية:**

$\hat{\alpha} = \bar{Y} - \hat{\beta} * \bar{X}$

$\hat{\alpha} = \frac{140}{10} - 0.1426 * \frac{320}{10}$

$\hat{\alpha} = 14 - 0.1426 * 32$

$\hat{\alpha} = 14 - 4.5632 = 9.4368$

ومنه يمكن كتابة المعادلة الانحدارية كما يلي:

$Y_i = 9.4368 + 0.1426X_i$

تفسير الإحصائي لمعامل الإنحدار:

معامل الإنحدار $\hat{\beta} = 0.1426$ يدل على أنه كلما زادت كمية الطاقة بوحدة واحدة، يؤدي ذلك إلى الزيادة بمقدار 0.143 كلغ، أي زيادة مقدارها 143 جرام.

المقدار الثابت ألفا 9.436 يدل أنه في حالة عدم استخدام البروتين في التغذية، فإن الوزن يزيد بـ 9.436 جرام.

مقدار الزيادة في الوزن في حالة X تساوي 50:

$Yi = 9.4368 + 0.1426 (50)$

$Yi = 16.5668$

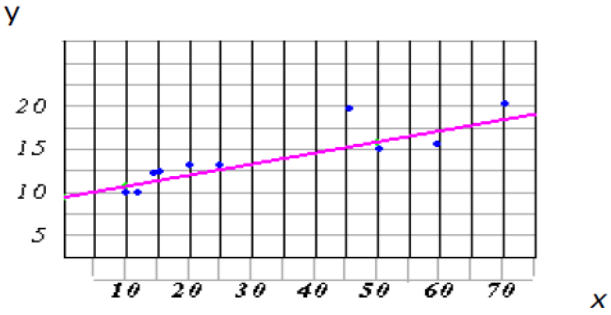
مقدار الخطأ العشوائي:

$\varepsilon = 15 - 16.5668 = -1.5668$

رسم معادل الإنحدار على نقاط الانتشار:

10	50	X
10.8628	16.5668	Y

ومنه يمكن تمثيل معادلة الإنحدار كما يلي :



التمرين رقم 03:

العينة	X	Y	X_iY_i	x^2
1	5	2	10	25
2	6	2	12	36
3	6	3	18	36
4	7	4	28	49
5	8	7	56	64
6	10	6	60	100
المجموع	42	24	184	310

من الجدول السابق نستنتج أن قيمة $\hat{\beta} = 1$

يمكن استعمال طريقة ثانية لإيجاد $\hat{\beta}$ وذلك على النحو التالي

العينة	X	Y	$x-\bar{x}$	$Y-\bar{Y}$	$(x-\bar{x})(Y-\bar{Y})$	$(x-\bar{x})^2$
1	5	2	2-	2-	4	4
2	6	2	1-	2-	2	1
3	6	3	1-	1-	1	1
4	7	4	0	0	0	0
5	8	7	1	3	3	1
6	10	6	3	2	6	9
المجموع	42	24	/	/	16	16

من الجدول الثاني كذلك قيمة $\hat{\beta} = 1$

$$\hat{\alpha} = \bar{y} - \hat{\beta}\,\bar{x}$$
$$\hat{\alpha} = \frac{24}{6} - 1 * \frac{42}{6}$$
$$\hat{\alpha} = 4 - 7$$
$$\hat{\alpha} = -3$$

وبالتالي يمكن كتابة النموذج كما يلي: $Y_i = 1 * x_i - 3$