جامعة الشاذلي بن جديد - الطارف
UNIVERSITE CHADLI BENDJEDID - ELTARF

2026-2025

اقتصاد قياسي

– المحاضرة 05

نموذج الانحدار الخطي المتعدد

الأساتذة المسؤولين			
الاسم واللقب	الرتبة	الكلية	البريد الالكتروني
محمد لمين ميرة	MCB	علوم اقتصادية SEGC	lamine.mira4@gmail.com

الطلبة المعنيين			
الكلية	القسم	السنة	تخصص
علوم اقتصادية SEGC	العلوم الاقتصادية	سنة ثالثة ليسانس	اقتصاد نقدي ومالي – اقتصاد وتسيير المؤسسات

الوضعية:

ليكن النموذج التالي ذو المتغير التابع Y_i والمتغيرات المستقلة X_{1i} و X_{2i} لـ 06 مشاهدات فقط (من أجل التبسيط):

i	X_1	X_2	Y_i
1	1	2	10
2	2	4	18
3	3	6	20
4	4	8	24
5	5	10	28
6	9	12	38

العمل المطلوب:

1) قدر معادلة نموذج الإنحدار الخطي المتعدد باستعمال طريقة المربعات الصغرى.

2) أحسب الخطأ المعياري للتقدير.

نموذج الإنحدار الخطي المتعدد :

نموذج الانحدار الخطي البسيط يفرض وجود متغير مستقل واحد فقط لتفسير المتغير التابع، غير أنه في الواقع الاقتصادي كثيرا ما يتطلع المتغير التابع لأكثر من متغير مستقل لتفسيره.

نموذج الإنحدار الخطي المتعدد الذي يسمى أيضا بنموذج الإنحدار الخطي العام هو امتداد للنموذج البسيط حيث أنه يتضمن أكثر من متغير مستقل واحد، ففي حالة النموذج البسيط كان الأمر يعتمد على متغيرين: متغير تابع والآخر متغير مستقل، لكن في حالة النموذج العام قد يتضمن عدد من المتغيرات تمثل انحدار للمتغير التابع Y على العديد من المتغيرات المستقلة X_1، ......، X_k. فمثلا إنتاجية العامل (تعتبر متغير تابع في هذا المثال) تتأثر بالعديد من المتغيرات المستقلة مثل : مستوى الدخل، ساعات العمل، الرضا الوظيفي، مستوى تقسيم العمل...الخ.

في دراستنا لنموذج الإنحدار الخطي المتعدد نقتصر على دراسة أثر متغيرين مستقلين فقط على المتغير التابع. ومنه يمكن كتابة المعادلة الإنحدارية للنموذج العام في حالة متغيرين مستقلين كما يلي:

$$Y_i = \hat{\alpha} + \hat{\beta}_1 . X_{i1} + \hat{\beta}_2 . X_{i2} + \varepsilon$$

حيث أن:

Yi : المتغير التابع؛

$\hat{\alpha}$: ثابت الإنحدار ويرمز له أيضا بـ $\hat{\beta}_0$؛

$\hat{\beta}_1$ و $\hat{\beta}_2$: معاملا الإنحدار؛

X_{i1} و X_{i2} : المتغيرات المستقلة؛

ε : الخطأ العشوائي أو البواقي.

تقدير معلمات نموذج الإنحدار الخطي المتعدد باستعمال طريقة المربعات الصغرى :

يوجد العديد من الطرائق لتقدير معلمات نموذج الإنحدار الخطي المتعدد أشهرها طريقة المربعات الصغرى وطريق المعقولية العظمى، في هذه المحاضرة سوف ندرس طريقة المربعات الصغرى، وفقا لهذه الطريقة فإن معلمات النموذج الذي يحتوي على متغيرين مستقلين يمكن تقديرها كما يلي:

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\Sigma(X_{i1}-\overline{X_1}).\ (Y_i-\bar{Y}).\ \Sigma\,(X_{i2}-\overline{X_2})^2 - \Sigma(X_{i2}-\bar{X}_2).(Y_i-\bar{Y}).\ \Sigma(X_{i1}-\overline{X_1}).(X_{i2}-\bar{X}_2)}{\Sigma(X_{i1}-\overline{X_1})^2.\ \Sigma\,(X_{i2}-\overline{X_2})^2-(\Sigma(X_{i1}-\overline{X_1}).(X_{i2}-\bar{X}_2))^2}$$

$$\hat{\beta}_2 = \frac{\Sigma(X_{i2}-\overline{X_2}).\ (Y_i-\bar{Y}).\ \Sigma\,(X_{i1}-\overline{X_1})^2 - \Sigma(X_{i1}-\bar{X}_1).(Y_i-\bar{Y}).\ \Sigma(X_{i1}-\overline{X_1}).(X_{i2}-\bar{X}_2)}{\Sigma(X_{i1}-\overline{X_1})^2.\ \Sigma\,(X_{i2}-\overline{X_2})^2-(\Sigma(X_{i1}-\overline{X_1}).(X_{i2}-\bar{X}_2))^2}$$

$$\hat{\alpha} = \overline{Y} - \hat{\beta}_1.\overline{X}_1 - \hat{\beta}_2.\overline{X}_2$$

حيث أن : $\overline{X}_1$: الوسط الحسابي للمتغير المستقل الأول.

$\overline{X}_2$: الوسط الحسابي للمتغير المستقل الثاني.

$\overline{Y}$: الوسط الحسابي للمتغير التابع.

يمكن تبسيط القوانين السابقة لـ $\hat{\beta}_1$ و لـ $\hat{\beta}_2$ باستعمال المجاميع وذلك كما يلي:

$$\hat{\beta}_1 = \frac{C_{1y} * C_{22} - C_{2y} * C_{12}}{C_{11} * C_{22} - (C_{12})^2}$$

$$\hat{\beta}_2 = \frac{C_{2y} * C_{11} - C_{1y} * C_{12}}{C_{11} * C_{22} - (C_{12})^2}$$

حيث أن:

$$C_{1y} = \Sigma(X_{i1} - \overline{X_1}).\ (Y_i - \bar{Y})$$

$$C_{22} = \Sigma\,(X_{i2} - \overline{X_2})^2$$

$$C_{2y} = \Sigma(X_{i2} - \bar{X}_2).(Y_i - \bar{Y})$$

$$C_{12} = \Sigma(X_{i1} - \overline{X_1}).(X_{i2} - \bar{X}_2)$$

$$C_{11} = \Sigma(X_{i1} - \overline{X_1})^2$$

$$C_{2y} = \Sigma(X_{i2} - \overline{X_2}).\ (Y_i - \bar{Y})$$

مثال

لإيجاد المجاميع التي تستعمل في تقدير معلمات نموذج الإنحدار الخطي المتعدد يتوجب إضافة 9 أعمدة للبيانات المعطاة في جدول الوضعية وذلك كما يلي:

				(1)	(2)	(3)	$(1)^2$	$(2)^2$	$(3)^2$	(1) * (2)	(1) * (3)	(2) * (3)
i	X_{i1}	X_{i2}	Y_i	$X_{i1}-\bar{X}_1$	$X_{i2}-\bar{X}_2$	$Y_i-\bar{Y}$	$(X_{i1}-\bar{X}_1)2$	$(X_{i2}-\bar{X}_2)2$	Cyy	$(X_{1i}-\bar{X}_1)*(X_{2i}-\bar{X}_2)$	$(X_{i1}-\bar{X}_1)(Y_i-\bar{Y})$	$(X_{i2}-\bar{X}_2)(Y_i-\bar{Y})$
1	1	2	10	−3	−5	−13	9	25	169	15	39	65
2	2	4	18	−2	−3	−5	4	9	25	6	10	15
3	3	6	20	−1	−1	−3	1	1	9	1	3	3
4	4	8	24	0	1	1	0	1	1	0	0	1
5	5	10	28	1	3	5	1	9	25	3	5	15
6	9	12	38	5	5	15	25	25	225	25	75	75
Σ	24	42	138	0	0	0	40	70	454	50	132	174

دائما مجموع انحرافات القيم
عن وسطها الحسابي يساوي 0

C_{11} C_{22} C_{yy} C_{12} C_{1y} C_{2y}

$$\bar{X}_1 = \frac{\Sigma x_{i1}}{n} = \frac{24}{6} = 4$$

$$\bar{X}_2 = \frac{\Sigma x_{i2}}{n} = \frac{42}{6} = 7$$

$$\bar{Y} = \frac{\Sigma y_i}{n} = 23$$

ومنه يمكن تقدير المعلمات كما يلي:

$$\hat{\beta}_1 = \frac{C_{1y} * C_{22} - C_{2y} * C_{12}}{C_{11} * C_{22} - (C_{12})^2} = \frac{132*70-174*50}{40*70-50*50} = \frac{540}{300} = 1.8$$

$$\hat{\beta}_2 = \frac{C_{2y} * C_{11} - C_{1y} * C_{12}}{C_{11} * C_{22} - (C_{12})^2} = \frac{174*40-132*50}{40*70-50*50} = \frac{360}{300} = 1.2$$

$$\hat{\alpha} = \bar{Y} - \hat{\beta}_1.\bar{X}_1 - \hat{\beta}_2.\bar{X}_2 = 23 - 1.8 * (4) - 1.2 * (7) = 7.4$$

ومنه يمكن كتابة المعادلة الإنحدارية لنموذج الإنحدار الخطي المتعدد كما يلي:

$$Y_i = 7.4 + 1.8 * X_{i1} + 1.2 * X_{i2} + \varepsilon$$

الخطأ المعياري للتقدير :

يستعمل القانون التالي لحساب الخطأ المعياري للتقدير في حالة نموذج الإنحدار الخطي المتعدد:

$$\sigma = \sqrt{\frac{SSE}{n-K}}$$

حيث K هو عدد معلمات النموذج

- **ملاحظة 1:** عدد معلمات النموذج في حالة متغيرين مستقلين هو 3.
- **ملاحظة 2:** لحساب SSE يتوجب قبل ذلك حساب SSR بالقانون التالي:

$$SSR = \hat{\beta}_1 * C_{1y} + \hat{\beta}_2 * C_{2y}$$

- **ملاحظة 3:** $SST = C_{yy}$ و $SSE = SST - SSR$

مثال: حل السؤال الثاني من الوضعية 02

$SSR = \hat{\beta}_1 * C_{1y} + \hat{\beta}_2 * C_{2y}$

$SSR = 1.8 * 132 + 1.2 * 174 = 446.4$

$SST = 454$

$SSE = SST - SSR = 454 - 446.6 = 7.6$

ومنه يمكن حساب الخطأ المعياري للتقدير:

$$\sigma = \sqrt{\frac{SSE}{n-K}} = \sqrt{\frac{7.6}{6-3}} = 1.5916$$

كلما اقترب الخطأ المعياري للتقدير من 0 كلما دل على كفاءة النموذج المستخدم.

اختبار المعنوية الكلية (اختبار F):

لاختبار المعنوية الكلية لنموذج نقوم باستعمال اختبار فيشر F وهو اختبار لجودة النموذج، الذي يحاول الإجابة عن سؤال: هل أفلح النموذج في تفسير التغيرات التي تحدث في المتغير التابع؟ ويختبر فرضية أن معاملات المتغيرات المستقلة تساوي الصفر، أي أن فرضية العدم تقول أنه لا يوجد تأثير للمتغيرات المفسرة وعلى المتغير التابع، ويمكن التعبير عن الفرضيات بالشكل التالي:

$H_0: \hat{\beta}_i = 0$ لا يوجد إنحدار – لا يوجد تأثير للمتغيرات المستقة على المتغير التابع

$H_1: \hat{\beta}_i \neq 0$ يوجد على الأقل متغير مسقل يؤثر على المتغير التابع

ولاتخاذ القرار حول الفرضية نقوم بمقارنة قيمة F_{cal} عن طريق جدول تحليل التباين ANOVA مع قيمة فيشر الجدولية بدرجة حرية البسط تساوي $K-1$ ودرجة حرية المقام $n-k-1$ (حيث K هو عدد المتغيرات المستقلة) وعمد مستوى معنوية $\alpha\%$. وفي حالة حالة فيشر المحسوبة أكبر من فيشر الجدولية نقول النموذج معنوي في مجمله، أي توجد معلمة على الأقل تختلف عن الصفر.

اختبار معنوية المعلمات المقدرة (اختبار T):

لاختبار معنوية المعلمات المقدرة بالنسبة لنموذج الإنحدار المتعدد نستعمل كذلك اختبار ستودنت، حيث يتم وضع الفرضية الصفرية والفرضية البديلة، حيث أن الفرضية الصفرية تقول أن $\hat{\beta} i$ (معلمة نموذج الإنحدار المراد اختبارها) غير معنوية، والفرضية البديلة تقول أن معلمة الإنحدار لديها دلالة احصائية وذلك كما يلي:

$H_0: \hat{\beta}_i = 0$ لا يوجد تأثير للمتغير المستقل (اسمه) على المتغير التابع

$H_1: \hat{\beta}_i \neq 0$ يوجد تأثير للمتغير المستقل (اسمه) على المتغير التابع

إذا كانت القيمة المطلقة لـ T المحسوبة أكبر من T المجدولة فإننا نقبل الفرضية البديلة أي يوجد تأثير للمتغير المستقل المعني على المتغير التابع. وإذا كانت القيمة المطلقة لـ T المحسوبة أقل من T المجدولة فإننا نقبل الفرضية الصفريبة أي لا يوجد تأثير للمتغير المستقل المعني على المتغير التابع.