

**III.1. Équation de propagation pour  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  dans le vide:**

En physique, le vide est un milieu caractérisé par une perméabilité magnétique  $\mu_0$  et une permittivité diélectrique  $\epsilon_0$ . En absence de courants et de charges, les quatre équations de Maxwell s'écrivent:

$$\vec{\text{div}} \vec{E} = \vec{0} \quad \vec{\text{div}} \vec{B} = \vec{0} \quad \vec{\text{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \vec{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Les équations de propagation du champ électromagnétique sont :

$$\Delta \vec{B} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = \vec{0} \quad \Delta \vec{E} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}$$

Dans le vide les ondes électromagnétiques se propagent à la vitesse de la lumière  $c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} 3 \times 10^8 \text{ m/s}$

.Alors: les équations de propagation du champ électromagnétique s'écrivent :

$$\Delta \vec{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0} \rightarrow \vec{\nabla}^2 \vec{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0} \quad \text{et} \quad \Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = \vec{0} \rightarrow \vec{\nabla}^2 \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = \vec{0} .$$

**III.2.L'onde plane progressive sinusoïdale :**

**III.2.2.définition:** Une onde est dite progressive lorsqu'elle se déplace dans le sens positif de l'axe x.

-Si en un point O de l'espace, on enregistre une perturbation de la forme:  $\vec{E} = \vec{E}_0 \cos \omega t$

Où  $\omega$  est la pulsation (rad/s) . Pour une onde plane progressive dans le sens  $z > 0$ , on aura:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \cos \omega(t - \frac{z}{c}) \quad \text{Si } \vec{E} \text{ est suivant l'axe Ox on a: } \vec{E}_x = \vec{E}_{0x} \cos \omega(t - \frac{z}{c})$$

On peut écrire l'onde plane en deux façons:

$$1/- E_x = E_{0x} \cos(\omega t - \frac{\omega}{c} z) \quad \vec{E}_x = \vec{E}_{0x} \cos(\omega t - \vec{k} \vec{r})$$

$$2/- E_x = E_{0x} \cos(\omega t - \omega \frac{z}{c}) = E_{0x} \cos 2\pi(\frac{t}{T} - \frac{z}{\lambda})$$

Avec T est la période :  $T = \frac{2\pi}{\omega}$  ( en seconde )  $\lambda$  est la longueur d'onde:  $\lambda = cT$ . ( en m)

Le vecteur d'onde  $\vec{k}$  (rad/m)indique la direction de propagation de l'onde.Son module est: $k = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda}$

**III.2.3. Représentation complexe:**

L'onde plane progressive sinusoïdale est définie sous la forme complexe, par :  $\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 e^{i(\omega t - \vec{k}\vec{r})}$

Ainsi la dérivation par rapport au temps donne:  $\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \omega \vec{E}$  et  $\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = -\omega^2 \vec{E}$  ( $\frac{\partial}{\partial t} \equiv \omega$  et  $\frac{\partial^2}{\partial t^2} \equiv -\omega^2$ )

Dans un système de coordonnées cartésiennes et par l'utilisation de la définition du laplacien vectoriel,

L'équation de propagation prend cette forme:  $[-k^2 + \vec{\nabla}^2] \vec{E} = \vec{0}$

Leur solution dite relation de dispersion, s'écrit:  $k = \frac{\omega}{c}$ .

**III.2.4. Structure de l'onde uniforme plane:**

En absence de charges électriques, le théorème du Gauss en notation complexe est donné par:

$$\vec{\text{div}} \vec{E} = \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = (-i \vec{k}) \cdot \vec{E} = 0 \quad \vec{k} \cdot \vec{E} = 0 \quad (\vec{k} \perp \vec{E}) \text{ le champ électrique est dit transversal.}$$

A partir du théorème de Maxwell-Faraday :  $\vec{\text{rot}} \vec{E} = \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

Pour une onde plane progressive sinuisoidale on a :  $\vec{\nabla} \times (\vec{E}) = -i \vec{k} \times \vec{E}$  D'où :  $-i \vec{k} \times \vec{E} = -i\omega \vec{B}$

$$\text{Donc : } \vec{B} = \frac{\vec{k} \times \vec{E}}{\omega} \quad (\text{Avec } \omega = kc) \quad |\vec{B}| = \frac{E}{c} \quad \text{Et:} \quad \vec{B} = \frac{E}{c} e^{i(\omega t - \vec{k}\vec{r})}$$

Le triplet de vecteurs  $(\vec{k}, \vec{B}, \vec{E})$  forme donc un trièdre direct,  $\vec{B}$  et  $\vec{E}$  sont orthogonaux entre eux et orthogonaux à la direction de propagation  $\vec{K}$

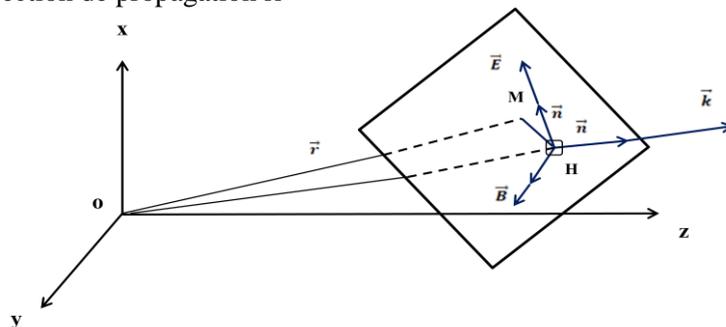


Figure III.1. Structure de l'onde plane progressive harmonique

**III.3. Propagation des ondes électromagnétiques dans les métaux:****III.3. 1. Propagation dans un milieu conducteur (non isolant):**

**III.3. 1.1. Temps de relaxation d'un conducteur:** donne une mesure du temps nécessaire au rétablissement de la neutralité électrique. l'équation de Maxwell-Gauss s'écrit :  $\text{div}(\epsilon \vec{E}) = \rho$

Enfin, la conservation de la charge impose  $\text{div} \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \Rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} + \sigma \text{div} \vec{E} = 0 \Rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\sigma}{\epsilon} \rho = 0$

La solution de la dernière équation est :  $\rho = \rho_0 e^{-\frac{\sigma}{\epsilon} t} = \rho_0 e^{-\frac{t}{T}}$  ( $T = \frac{\epsilon}{\sigma}$  est le temps de relaxation du milieu,  $\epsilon$  la permittivité du matériau et  $dq = \rho d\tau$  la charge)

**III.3. 1.2. Equation de propagation dans un conducteur :** les équations de Maxwell s'écrivent:  
 $\text{div} \vec{E} = \vec{0} \quad \text{div} \vec{H} = \vec{0} \quad \text{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \quad \text{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \mu_0 \left[ \sigma \vec{E} + \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right]$

**Remarques :-** Pour les métaux ferromagnétiques (cobalt, nickel ....), la permittivité diélectrique du milieu  $\epsilon$  peut être différente de celle du vide  $\epsilon_0$ .

La relation de dispersion de l'onde électromagnétique dans un milieu métallique:  $k^2 = \epsilon \mu_0 \omega^2 \left( 1 - i \frac{\sigma}{\epsilon \omega} \right)$

**-Equation de propagation dans un milieu isolant:** Si la conductivité est nulle ( $\sigma = 0$ ), la relation de dispersion d'un isolant parfait (diélectrique) est donnée par:  $k^2 = \epsilon \mu_0 \omega^2$

**III.3. 2. Cas d'un milieu peu conducteur ::**  $\frac{2\pi}{\omega} \ll T \approx \frac{1}{\omega} \ll \frac{\epsilon}{\sigma}$  Donc :  $\frac{\sigma}{\omega \epsilon} \ll 1$

Alors:  $k^2 = \epsilon \mu_0 \omega^2 \left( 1 - i \frac{\sigma}{\epsilon \omega} \right)$  ( $k = \pm \omega \sqrt{\epsilon \mu_0} \left( 1 - i \frac{\sigma}{\epsilon \omega} \right)^{\frac{1}{2}} \approx \pm \omega \sqrt{\epsilon \mu_0} \left( 1 - i \frac{\sigma}{2\epsilon \omega} \right)$ )

**Remarque:** L'existence d'un vecteur d'onde complexe traduit l'existence du phénomène d'absorption. Il existe aussi un phénomène de dispersion car la vitesse de phase de l'onde dépend de la pulsation.

Le champ électrique associé à l'onde s'écrit:  $E_x(z, t) = E_0 e^{i\omega t} e^{-ikz}$

Alors:  $-ikz = -iz \left[ \pm \omega \sqrt{\epsilon \mu_0} \left( 1 - i \frac{\sigma}{2\epsilon \omega} \right) \right] = \pm z \omega \sqrt{\epsilon \mu_0} \left( i + \frac{\sigma}{2\epsilon \omega} \right)$

**Remarque:** la solution négative est en adéquation avec la physique et décrit l'absorption de l'onde, par contre la solution positive représente une onde diverge à l'infini

$E_x(z, t) = E_0 e^{-\frac{\sigma}{2} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon}} z} e^{i\omega(t - \sqrt{\epsilon \mu_0} z)}$  Alors:  $E_x(z, t) = E_0' (z) e^{i\omega(t - \frac{z}{v_\phi})}$

L'amplitude  $E_0' (z)$  non plus constante, mais décroissante en z, cette décroissance en z est liée à la partie imaginaire de  $\vec{k}$  ( $\sigma = 0 \Rightarrow \text{Im}(\vec{k}) = 0 \Rightarrow E_0' = E_0$ )

- la vitesse de phase:  $V_\phi = \frac{1}{\sqrt{\epsilon \mu_0}}$  (la même expression que dans un milieu isolant)

**III.3. 3. Cas d'un milieu très conducteur: EFFET DE PEAU:**

L'effet de peau est un phénomène électromagnétique qui se produit à haute fréquence. Il entraîne une pénétration très superficielle du champ électromagnétique à l'intérieur d'un conducteur, également connu sous le nom d'effet Kelvin.

Pour simplifier la relation de dispersion en utilisant un exemple précis que pour un bon conducteur:

$\frac{\sigma}{\omega \epsilon} \gg 1$  (Exemple d'un excellent conducteur: le cuivre  $\frac{\sigma}{\epsilon \omega} = 1.1 \times 10^8 \gg 1$ ):

( $\sigma = 0.6 \times 10^8 (\Omega m)^{-1}$ ,  $\epsilon = 8.85 \times 10^{-12} \text{ S.I}$ ,  $\omega = 2\pi \times 10^9 \text{ S}^{-1}$ )

D'après la relation de dispersion:  $k^2 = -i \mu_0 \sigma \omega = \mu_0 \sigma \omega e^{-i\frac{\pi}{2}}$  Alors:  $k = \pm (1 - i) \sqrt{\frac{\mu_0 \sigma \omega}{2}}$

L'onde électromagnétique:  $E_x(z, t) = E_0' e^{-\frac{z}{\delta}} e^{i(\omega t - \frac{z}{\delta})}$

D'où:  $\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \sigma \omega}}$  L'épaisseur de peau (notée  $\delta$ ) est la distance caractéristique à laquelle le champ électromagnétique pénètre à l'intérieur d'un conducteur. À une profondeur  $\delta$ , l'amplitude de l'onde électromagnétique est réduite à 1/e de sa valeur en surface. Cette épaisseur dépend de la fréquence de l'onde ainsi que des propriétés du matériau conducteur :  $|E_x(z + \delta)| = \frac{|E_x(z)|}{e}$

La vitesse de phase de l'onde est :  $V_\phi = \omega \delta = \sqrt{\frac{2\omega}{\mu_0 \sigma}}$  (avec  $\epsilon_0 \mu_0 c^2 = 1$ )  $V_\phi = c \sqrt{\frac{2\epsilon_0 \omega}{\sigma}} \ll c$

**III.3.4. Propagation des ondes planes électromagnétiques dans les gaz ionisés à basse pression:**

**III.3.4. 1. Définition d'un plasma :** est appelé aussi «quatrième état de la matière», est un milieu composé d'un mélange neutre de particules, d'électrons négatifs et d'ions.

On propose un modèle de plasma constitué de  $n$  électrons et de  $n$  ions par unité de volume.

Pour un plasma peu dense on néglige toutes interactions entre les ions ( $\vec{V}$  et  $\vec{v}$  sont les vitesses d'un ion et d'un électron respectivement.  $m_{e^-}$  et  $m_{e^+}$  les masses des électrons et des ions.)

Si un champ électrique extérieur  $\vec{E}$  est appliqué au plasma :  $m_{e^+} \frac{d\vec{V}}{dt} = +e\vec{E}$  et  $m_{e^-} \frac{d\vec{v}}{dt} = -e\vec{E}$

Par conséquent :  $\frac{d\vec{V}}{dt} = -\frac{m_{e^-}}{m_{e^+}} \frac{d\vec{v}}{dt}$  Soit, à une constante près :  $\vec{V} = -\frac{m_{e^-}}{m_{e^+}} \vec{v}$

$\frac{m_{e^-}}{m_{e^+}} \ll 1$ , la vitesse des ions positifs est très faible vis-à-vis de celle des électrons. On ne prendra en compte que le mouvement des électrons.

La densité volumique du plasma:  $\vec{j} = -ne\vec{v} + ne\vec{V} = -ne \left(1 + \frac{m_{e^-}}{m_{e^+}}\right) \vec{v} \approx -ne\vec{v}$  (égale à celle des électrons).

**III.3.4.2. Equations de Maxwell dans le plasma:**  $\text{div } \vec{E} = 0$   $\text{div } \vec{B} = 0$   $\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

$$\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad \text{Avec: } \frac{\partial \vec{j}}{\partial t} = -ne \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \frac{ne^2}{m_{e^-}} \vec{E}$$

**III.3.4.3. Relation de dispersion des ondes électromagnétiques planes progressives monochromatiques :** Cherchons une solution complexe des équations de Maxwell sous la forme :

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(\omega t - \vec{k}\vec{r})} \quad \text{et} \quad \vec{B} = \vec{B}_0 e^{i(\omega t - \vec{k}\vec{r})} \quad \text{Relation de dispersion: } k^2 = -\mu_0 \frac{ne^2}{m_{e^-}} + \omega^2 \epsilon_0 \mu_0$$

$$(c^2 = \frac{1}{\epsilon_0 \mu_0} \text{ et } \omega_p^2 = \frac{\mu_0 c^2 ne^2}{m_{e^-}}) \text{ (Pulsation plasma)}$$

L'équation de dispersion devient:  $k^2 = \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2}$  (Équation de Klein -Gordon)

Si  $\omega > \omega_p$  alors  $k$  réel: il y a alors propagation: la fréquence de plasma  $\omega_p$  constitue donc, ici, une fréquence de coupure en dessous de laquelle le phénomène de propagation disparaît. Alors  $k = \frac{\omega}{c}$

et  $v_\phi \approx c$ : le comportement du plasma est proche de celui du vide .

Si  $\omega < \omega_p$ , alors  $k$  est imaginaire pur et les ondes électromagnétiques sont évanescentes; il ne peut y avoir propagation. Alors:  $k = \pm i \sqrt{\frac{\omega_p^2 - \omega^2}{c^2}} = \pm ik''$

Le champ électrique de l'onde:  $\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(\omega t)} e^{\pm k''x}$  Soit  $\vec{E} = \vec{E}_0 e^{\pm k''x} \cos(\omega t + \phi_0)$

**III.3.4. 4. Structure de l'onde plane progressive harmonique :**

La structure de l'onde plane progressive dans le plasma peut être décrite à l'aide d'une relation de dispersion, qui relie la fréquence de l'onde, sa longueur d'onde et les propriétés du plasma. Cette relation de dispersion peut être utilisée pour prédire comment les ondes électromagnétiques se propagent à travers le plasma et comment elles peuvent être modifiées par les propriétés du plasma.

-Domaine dispersif: le cas où  $\omega > \omega_p$  (Donc on a une propagation sans atténuation) :  $k = \frac{\sqrt{\omega^2 - \omega_p^2}}{c}$

La vitesse de phase est :  $v_\phi(\omega) = \frac{\omega}{k} = \frac{c}{\sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}}$

L'indice de réfraction du plasma est donné par :  $n = \frac{c}{v_\phi} = \frac{ck}{\omega}$  soit  $n = \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}} < 1$

Le trièdre  $(\vec{E}, \vec{B}, \vec{k})$  est direct et  $\vec{B} = \frac{kE}{\omega} = \frac{E}{v_\phi}$ , alors la structure de l'onde plane progressive monochromatique est similaire à celle du vide, c'est-à-dire seule la vitesse de phase est différente et dépend de la pulsation de l'onde.

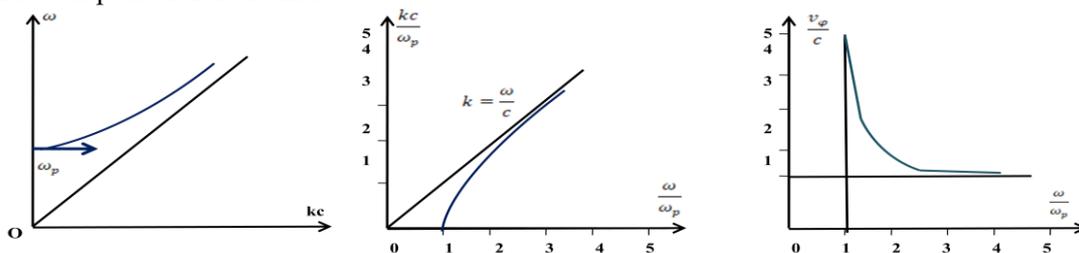


Figure III.2. Structure de l'onde plane progressive dans le plasma

**III.4. Réflexion et Réfraction des ondes électromagnétiques.**

**III.4. 1. Rappel: lois de la réflexion et de la réfraction**

On considère deux milieux notés 1 et 2 de caractéristiques respectives  $(\epsilon_1, \mu_1)$  et  $(\epsilon_2, \mu_2)$ .

Les deux milieux sont séparés par une interface plane. Les propriétés électromagnétiques des deux milieux sont décrites par les indices de réfraction  $n_1$  et  $n_2$ .

Avec  $k_1$  et  $k_2$  les nombres d'ondes dans les milieux 1 et 2,  $\eta_1$  et  $\eta_2$  leur impédance.

On suppose qu'une onde plane de vecteur d'onde  $\vec{k}_i$ , issue du milieu 1, est incidente sur l'interface.

Les lois de Snell-Descartes (lois de la réflexion et de la réfraction) montrent que :

- Les vecteurs d'onde associés aux ondes réfléchie ( $\vec{k}_r$ ) et transmise ( $\vec{k}_t$ ) sont situés dans le même plan appelé plan d'incidence. - Les angles d'incidence et de réflexion sont égaux :  $\theta_r = \theta_i$

- L'angle de réfraction est donné par la relation :  $k_1 \sin \theta_i = k_2 \sin \theta_t$

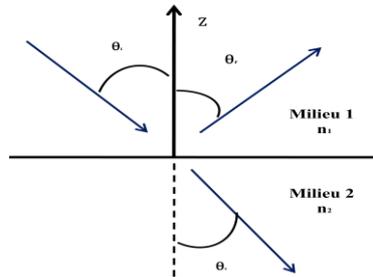


Figure III.3. Géométrie considérée pour la détermination des lois de Snell –Descartes

**III.4.2. Incidence normale:**

Le champ est polarisé linéairement suivant Ox. Les champs électrique et magnétique des ondes incidentes sont:

$$\vec{E}_i = E_0 \vec{e}_x e^{(-ik_1 z)} \quad \vec{H}_i = \frac{1}{\eta_1} \vec{e}_z \vec{E}_i = \frac{E_0}{\eta_1} \vec{e}_y e^{(-ik_1 z)}$$

Le champ réfléchi s'écrit:  $\vec{E}_r = R E_0 \vec{e}_x e^{(+ik_1 z)}$   $\vec{H}_r = \frac{1}{\eta_1} (-\vec{e}_z) \vec{E}_r = -\frac{R E_0}{\eta_1} \vec{e}_y e^{(+ik_1 z)}$

Le champ transmis s'écrit:  $\vec{E}_t = T E_0 \vec{e}_x e^{(-ik_2 z)}$   $\vec{H}_t = \frac{1}{\eta_2} \vec{e}_z \vec{E}_t = \frac{T E_0}{\eta_2} \vec{e}_y e^{(-ik_2 z)}$

Le coefficient de transmission  $R = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1}$  Le coefficient de réflexion  $T = \frac{2\eta_2}{\eta_2 + \eta_1}$

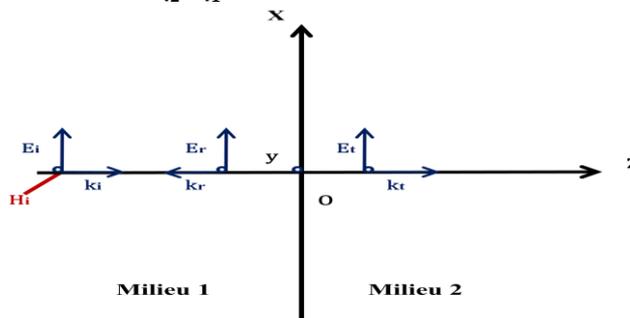


Figure III.4. Incidence normale

**II. 4.3. Incidence oblique : équations de Fresnel:** La polarisation de l'onde incidente est:

- Parallèle au plan d'incidence - Perpendiculaire au plan d'incidence

**a) polarisation parallèle (TM):**

Est une forme de polarisation des ondes électromagnétiques dans laquelle le champ magnétique est perpendiculaire à la direction de propagation de l'onde.

Les champs électrique et magnétique des ondes incidentes sont:

$$\vec{E}_i = E_0 (\vec{e}_x \cos \theta_i - \vec{e}_z \sin \theta_i) e^{[-jk_1(x \sin \theta_i + z \cos \theta_i)]} \quad \vec{H}_i = \frac{E_0}{\eta_1} \vec{e}_y e^{[-jk_1(x \sin \theta_i + z \cos \theta_i)]}$$

Le champ réfléchi s'écrit:

$$\vec{E}_r = R E_0 (\vec{e}_x \cos \theta_i + \vec{e}_z \sin \theta_i) e^{[-jk_1(x \sin \theta_i - z \cos \theta_i)]} \quad \vec{H}_r = -\frac{R E_0}{\eta_1} \vec{e}_y e^{[-jk_1(x \sin \theta_i - z \cos \theta_i)]}$$

Le champ transmis s'en déduit par :

$$\vec{E}_t = T E_0 (\vec{e}_x \cos \theta_t - \vec{e}_z \sin \theta_t) e^{[-jk_2(x \sin \theta_t + z \cos \theta_t)]} \quad \vec{H}_t = -\frac{T E_0}{\eta_2} \vec{e}_y e^{[-jk_2(x \sin \theta_t + z \cos \theta_t)]}$$

**Équations de Fresnel :**  $R_{TM} = \frac{\eta_2 \cos \theta_t - \eta_1 \cos \theta_i}{\eta_2 \cos \theta_t + \eta_1 \cos \theta_i}$   $T_{TM} = \frac{2\eta_2 \cos \theta_i}{\eta_2 \cos \theta_t + \eta_1 \cos \theta_i}$

**b) polarisation perpendiculaire (TE):**

Dans ce cas le champ électrique est selon l'axe Oz, il est perpendiculaire au plan d'incidence et donc parallèle à l'interface entre les deux milieux. Le champ magnétique est dans le plan xOy.

Champs incidents sont:

$$\vec{E}_i = E_0 \vec{e}_y e^{[-jk_1(x \sin \theta_i + z \cos \theta_i)]} \quad \vec{H}_i = \frac{E_0}{\eta_1} (-\vec{e}_x \cos \theta_i + \vec{e}_z \sin \theta_i) e^{[-jk_1(x \sin \theta_i + z \cos \theta_i)]}$$

Les champs réfléchis:

$$\vec{E}_r = R E_0 \vec{e}_y e^{[-jk_1(x \sin \theta_i - z \cos \theta_i)]} \quad \vec{H}_r = -\frac{R E_0}{\eta_1} (\vec{e}_x \cos \theta_i + \vec{e}_z \sin \theta_i) e^{[-jk_1(x \sin \theta_i - z \cos \theta_i)]}$$

Champs transmis :

$$\vec{E}_t = T E_0 \vec{e}_y e^{[-jk_2(x \sin \theta_t + z \cos \theta_t)]} \quad \vec{H}_t = \frac{T E_0}{\eta_2} (-\vec{e}_x \cos \theta_t + \vec{e}_z \sin \theta_t) e^{[-jk_2(x \sin \theta_t + z \cos \theta_t)]}$$

Les formules de Fresnel:  $R_{TE} = \frac{\eta_2 \cos \theta_i - \eta_1 \cos \theta_t}{\eta_2 \cos \theta_i + \eta_1 \cos \theta_t}$   $T_{TE} = \frac{2 \eta_2 \cos \theta_i}{\eta_2 \cos \theta_i + \eta_1 \cos \theta_t}$

**Remarque:** Si l'angle d'incidence est nulle  $\theta_i = 0$  (incidence normale), les formules TE et TM conduisent évidemment au même résultat.

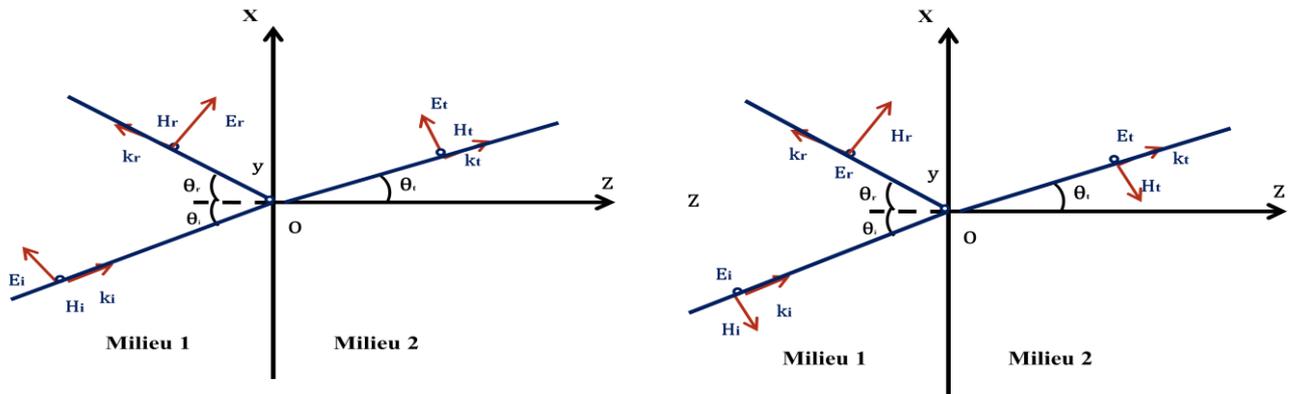


Figure III.5. Incidence oblique, polarisation parallèle (TM)-Incidence oblique (Fig6) Polarisation parallèle (TE)

**II. 4.4. Cas de l'interface entre deux isolants magnétiques:**

Pour deux isolants magnétiques, les simplifications suivantes sont applicables :  $\mu_0 = \mu_1 = \mu_2$

$$\sin \theta_t = \frac{k_1}{k_2} \sin \theta_i = \sqrt{\frac{\epsilon_{r1}}{\epsilon_{r2}}} \sin \theta_i \quad \cos \theta_t = \sqrt{1 - \sin^2 \theta_t} = \sqrt{1 - \frac{\epsilon_{r1}}{\epsilon_{r2}} \sin^2 \theta_i}$$

Ces équations nécessitent a priori d'avoir :  $\sqrt{\frac{\epsilon_{r1}}{\epsilon_{r2}}} \sin \theta_i \leq 1$  ( $\epsilon_{r2} \geq \epsilon_{r1}$ )

L'angle d'incidence critique  $\theta_c$  :  $\sin \theta_c = \sqrt{\frac{\epsilon_{r2}}{\epsilon_{r1}}}$

On considère par exemple l'expression du champ électrique transmis en polarisation TE.

Au delà de  $\theta_c$ , on a :  $\sin \theta_t = \frac{k_1}{k_2} \sin \theta_i > 1$

$$\cos \theta_t = \sqrt{1 - \left(\frac{k_1}{k_2} \sin \theta_i\right)^2} = \pm j \sqrt{\left(\frac{k_1}{k_2} \sin \theta_i\right)^2 - 1}$$

Alors :  $\vec{E}_t = T E_0 \vec{e}_y e^{(-jk_1 x \sin \theta_i)} e^{(\pm \sqrt{(k_1 \sin \theta_i)^2 - (k_2)^2} z)}$

-Le champ transmis d'une onde électromagnétique se propage dans la direction Ox et s'atténue dans la direction Oz. Le champ reste confiné près de l'interface entre les deux milieux et se propage le long de cette interface.

Dans le cas d'une incidence quelconque. Les expressions des coefficients de réflexion ;

$$R_{TM} = \frac{\frac{\epsilon_{r1}}{\sqrt{\epsilon_{r2}}} \sqrt{1 - \frac{\epsilon_{r1}}{\epsilon_{r2}} \sin^2 \theta_i} - \sqrt{1 - \sin^2 \theta_i}}{\frac{\epsilon_{r1}}{\sqrt{\epsilon_{r2}}} \sqrt{1 - \frac{\epsilon_{r1}}{\epsilon_{r2}} \sin^2 \theta_i} + \sqrt{1 - \sin^2 \theta_i}} \quad R_{TE} = \frac{-\frac{\epsilon_{r2}}{\sqrt{\epsilon_{r1}}} \sqrt{1 - \frac{\epsilon_{r1}}{\epsilon_{r2}} \sin^2 \theta_i} + \sqrt{1 - \sin^2 \theta_i}}{\frac{\epsilon_{r2}}{\sqrt{\epsilon_{r1}}} \sqrt{1 - \frac{\epsilon_{r1}}{\epsilon_{r2}} \sin^2 \theta_i} + \sqrt{1 - \sin^2 \theta_i}}$$

$\theta_b$  L'angle de Brewster est l'angle d'incidence à laquelle la réflexion de la lumière polarisée parallèlement à la surface est totalement éliminée, ce qui signifie que toute la lumière réfléchi est polarisée perpendiculairement à la surface.  $\sin\theta_i = \sin\theta_b = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\epsilon_{r1}}{\epsilon_{r2}}}}$

Les coefficients de transmission:  $T_{TM} = \frac{2\sqrt{\epsilon_{r1}}\sqrt{1 - \sin^2\theta_i}}{\sqrt{\epsilon_{r1}}\sqrt{1 - \frac{\epsilon_{r1}}{\epsilon_{r2}}\sin^2\theta_i} + \sqrt{\epsilon_{r2}}\sqrt{1 - \sin^2\theta_i}}$   $T_{TE} = \frac{2\sqrt{\epsilon_{r1}}\sqrt{1 - \sin^2\theta_i}}{\sqrt{\epsilon_{r1}}\sqrt{1 - \sin^2\theta_i} + \sqrt{\epsilon_{r2}}\sqrt{1 - \frac{\epsilon_{r1}}{\epsilon_{r2}}\sin^2\theta_i}}$

**Remarque :** Le coefficient de transmission sera nul tandis que le coefficient de réflexion sera égal à 1. Ce cas correspond à la réflexion interne totale.

**III.4. 5. Réflexion et réfraction à la surface d'un bon conducteur**

On considère une onde plane incidente uniforme sinusoïdale polarisée rectilignement ( $\vec{E}_i \parallel Ox$ ) se propageant dans le vide selon l'axe  $Oz$  et arrivant sous incidence normale, à la surface plane d'un bon conducteur.

Physiquement, il n'y a pas d'onde transmise ( $\vec{E}_t = \vec{0}$  et  $\vec{B}_t = \vec{0}$ ) que les seuls courants vrais pouvant être induits par cette onde le sont sur la surface du métal. On note que les directions de polarisation des vecteurs incident et réfléchi sont identiques.

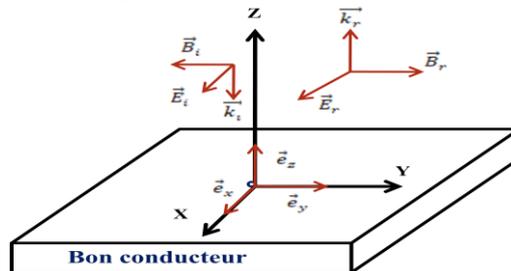


Figure III.7. Réflexion et réfraction à la surface d'un bon conducteur

Champs incidents sont:  $\vec{E}_i = E_{0i} e^{i(\omega t + kz)} \vec{e}_x$   $\vec{B}_i = -\frac{E_{0i}}{c} e^{i(\omega t + kz)} \vec{e}_y$

Les champs réfléchis:  $\vec{E}_r = E_{0r} e^{i(\omega t - kz)} \vec{e}_x$   $\vec{B}_r = \frac{E_{0r}}{c} e^{i(\omega t - kz)} \vec{e}_y$

Le trièdre  $(\vec{k}_r, \vec{E}_r, \vec{B}_r)$  sera direct si le champ magnétique réfléchi  $\vec{B}_r$  est dans la même direction que le champ magnétique incident  $\vec{B}_i$  ce qui signifie qu'il n'y a pas de changement de phase lors de la réflexion.

Les ondes incidentes s'écrivent :  $\vec{E}_i = E_{0i} e^{i(\omega t + kz)} \vec{e}_x$   $\vec{B}_i = -\frac{E_{0i}}{c} e^{i(\omega t + kz)} \vec{e}_y$

Les ondes réfléchis sont:  $\vec{E}_r = -E_{0i} e^{i(\omega t - kz)} \vec{e}_x$   $\vec{B}_r = -\frac{E_{0i}}{c} e^{i(\omega t - kz)} \vec{e}_y$

Alors:  $\vec{E} = \vec{E}_i + \vec{E}_r = 2 E_{0i} \sin(kz) \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) \vec{e}_x$

Et :  $\vec{B} = \vec{B}_i + \vec{B}_r = 2 \frac{E_{0i}}{c} \cos(kz) \cos(\omega t + \pi) \vec{e}_y$  En revenant à la notation réelle

-Les champs ne se propagent plus mais qu'ils oscillent sinusoïdalement en fonction du temps avec une amplitude qui est fonction de la distance  $z$ , leur déphasage étant de  $\frac{\pi}{2}$  on dit que l'onde est stationnaire.

**III.4. 6. Réflexion d'une onde électromagnétique par un gaz ionisé**

Les plasmas sont caractérisés par une conductivité imaginaire pure:  $\sigma(\omega) = \frac{\epsilon_0 \omega_p^2}{i\omega}$  ( $\epsilon \in \mathbb{C}$ )

Quelle que soit la pulsation, le milieu se comporte de manière similaire à un conducteur parfait dans le domaine  $\omega \gg \frac{1}{\tau}$ .

On considère une onde se propageant dans le vide ( $n=1$ ) et arrivant sur un plasma, dont l'indice est  $n$ .

Les coefficients de réflexion et transmission :  $r = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} = \frac{1 - n}{1 + n}$   $t = \frac{2n_1}{n_1 + n_2} = \frac{2}{1 + n}$

Où  $n$  est l'indice de réfraction du plasma:  $n = \frac{c}{v_\phi} = \frac{ck}{\omega}$  soit  $n = \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}$

-**Si  $\omega > \omega_p$ :** Une partie de l'onde sera réfléchi, l'autre sera propagée sans atténuation

$$r = \frac{1 - \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}}{1 + \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}}$$

$$t = \frac{2}{1 + \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}}$$

- Si  $\omega < \omega_p$  : Les calculs peuvent formellement s'appliquer avec un indice complexe imaginaire pur:

$$k = i \sqrt{\frac{\omega_p^2 - \omega^2}{c^2}} \quad \text{donc} \quad n = \frac{ck}{\omega} = i \sqrt{\frac{\omega_p^2}{\omega^2} - 1}$$

On a alors un coefficient de réflexion complexe mais dont le module est égale 1, ce qui signifie qu'il y a réflexion totale de l'onde sur le plasma dans ce cas.

En appliquant le même formalisme, on peut définir les coefficients de réflexion et transmission en énergie en calculant les vecteurs de Poynting, et on trouve de même :  $\begin{cases} R = r^2 \\ T = 1 - R \end{cases}$



Figure III.8. Réflexion d'une onde électromagnétique par un gaz ionisé

### III.5. Ondes guidées:

#### III.5.1. Définition du guide d'onde:

Un guide d'onde est une portion d'espace limitée par un conducteur supposé parfait et remplie ou vide d'un milieu isolant. Il permet de conduire les ondes électromagnétiques sans dispersion d'énergie. Il existe différents types de guides d'ondes, certains diélectriques et d'autres métalliques, qui sont invariants par translation dans la direction de propagation de l'onde. Le milieu dans lequel se propagent les ondes est toujours un milieu isolant. Les guides d'ondes sont utilisés dans les applications pratiques de l'OEM, comme le radar ou les communications, pour éviter les interférences et minimiser l'atténuation de l'onde. La présence d'une structure diélectrique ou conductrice permet des modes de propagation privilégiés dans une direction, comme un cylindre infini de conducteur ou de diélectrique. Un exemple de guide d'onde est un câble coaxial où le signal se propage dans le milieu diélectrique qui sépare le fil central de l'enveloppe conductrice.

#### III.5.2. Solutions générales des ondes TEM, TE et TM

Les équations qui permettent d'exprimer les fréquences de coupure des différents modes proviennent des équations de Maxwell. Supposons que les champs électriques et magnétiques sont harmoniques dans le temps, et que la propagation se fait suivant l'axe z.

Pour ce faire, chacune des composantes du champ sera écrite sous la forme générique

$$\psi(x, y, z, t) = F(x, y) e^{i(\omega t - k_z z)}$$

Si la région du guide d'onde est sans sources, les équations de Maxwell peuvent être écrites selon :

$$\nabla \times \vec{E} = -i\omega\mu\vec{H} \quad \nabla \times \vec{H} = i\omega\varepsilon\vec{E}$$

On peut résoudre ces équations pour obtenir les quatre composantes transversales en fonction des composantes longitudinales ( $E_x, E_y, H_x$  et  $H_y$  en fonction de  $E_z$  et  $H_z$ ) :

$$\begin{aligned} E_x &= \frac{-j}{k_c^2} \left( \beta \frac{\partial E_z}{\partial x} + \omega\mu \frac{\partial H_z}{\partial y} \right) & E_y &= \frac{j}{k_c^2} \left( -\beta \frac{\partial E_z}{\partial y} + \omega\mu \frac{\partial H_z}{\partial x} \right) \\ H_x &= \frac{j}{k_c^2} \left( \omega\varepsilon \frac{\partial E_z}{\partial y} - \beta \frac{\partial H_z}{\partial x} \right) & H_y &= \frac{-j}{k_c^2} \left( \omega\varepsilon \frac{\partial E_z}{\partial x} + \beta \frac{\partial H_z}{\partial y} \right) \end{aligned}$$

Le nombre d'onde de coupure est:  $k_c^2 = k^2 - \beta^2$

Le nombre d'onde du matériau du guide d'onde :  $k = \omega\sqrt{\mu\varepsilon} = \frac{2\pi}{\lambda}$

#### III.5.2.1. Les modes de propagations : Les modes transversaux sont classés selon différents types :

##### a. Les modes de propagations TEM

Une onde TEM est une onde électromagnétique dont les champs électrique et magnétique oscillent perpendiculairement à la direction de propagation de l'onde, sans composante de champ électrique ou magnétique dans la direction de propagation.

Une onde TEM est caractérisée par  $E_z = H_z = 0$ . A partir des équations précédentes, il s'ensuit on obtient que tous les champs transversaux sont nuls, à moins que  $k_c^2 = 0$ , ce qui donne un résultat indéterminé.

On résout les équations de Maxwell pour obtenir :  $\beta = \omega\sqrt{\mu\epsilon} = k$ , ce qui signifie que  $k_c = 0$  pour les ondes TEM.

Une onde TEM peut seulement exister lorsque deux ou plusieurs conducteurs sont présents.

L'impédance de l'onde TEM est donnée par :  $Z_{TEM} = \frac{E_x}{H_y} = -\frac{E_y}{H_x} = \frac{\omega\mu}{\beta} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} = \eta$

#### b. Les modes de propagations TE (transverse électrique)

Les modes TE ne présentent aucun champ électrique dans la direction de propagation.

Dans ce mode l'onde TE est caractérisée par  $E_z = 0$  et  $H_z \neq 0$ .

Dans ce cas,  $k_c \neq 0$  et  $\beta = \sqrt{k^2 - k_c^2}$  est fonction de la fréquence et de la géométrie du guide d'onde. L'impédance de l'onde TE est :  $Z_{TE} = \frac{E_x}{H_y} = -\frac{E_y}{H_x} = \frac{k\eta}{\beta}$

#### c. Les modes de propagation TM

Une onde TM est caractérisée par  $H_z = 0$  et  $E_z \neq 0$ .

Dans ce cas,  $k_c \neq 0$  et  $\beta = \sqrt{k^2 - k_c^2}$  est fonction de la fréquence et de la géométrie du guide d'onde.

L'impédance de l'onde TM est :  $Z_{TM} = \frac{E_x}{H_y} = -\frac{E_y}{H_x} = \frac{\beta\eta}{k}$

#### d. Les modes hybrides:

Les ondes hybrides sont des ondes électromagnétiques qui ont des caractéristiques à la fois des ondes TE et des ondes TM, avec des composantes de champ électrique et magnétique dans la direction de propagation. Elles peuvent se produire lorsqu'il y a des changements dans les conditions d'excitation dans un milieu, comme la réflexion ou la transmission à travers une interface entre deux milieux différents. Les ondes hybrides sont utilisées dans des applications telles que les guides d'ondes, les câbles coaxiaux et les antennes pour la transmission d'ondes électromagnétiques.

#### III.5.2.2. Atténuation due aux pertes diélectriques

L'atténuation dans un guide d'onde peut être causée par les pertes dans le diélectrique ( $\alpha_d$ ), Ou les pertes dans le conducteur ( $\alpha_c$ ). L'atténuation totale est donnée par la relation suivante :  $\alpha = \alpha_c + \alpha_d$

L'atténuation dans un guide d'onde dépend de la structure physique du guide et doit être évaluée séparément pour chaque guide. Si le guide est rempli d'un diélectrique uniforme, l'atténuation due au diélectrique peut être calculée à partir de la constante de propagation.

La constante de propagation  $\gamma = \alpha_d + j\beta = \sqrt{k_c^2 - k^2} \gamma = \sqrt{k_c^2 - \omega^2 \mu_0 \epsilon_r \epsilon_0 (1 - \tan \delta)}$

la constante diélectrique complexe.  $\epsilon = \epsilon_r \epsilon_0 (1 - \tan \delta)$

En générale, les pertes diélectriques sont faibles, donc  $\tan \delta \ll 1$ , ce qui permet de simplifier:  $\gamma = \frac{k^2 \tan \delta}{2\beta} + j\beta$  Où  $k^2 = \omega^2 \mu_0 \epsilon_r \epsilon_0$  est le nombre d'onde sans pertes.

Si les pertes sont faibles, la constante de phase  $\beta$  est la même, et:  $\alpha_d = \frac{k^2 \tan \delta}{2\beta}$  [Np/m]

pour les ondes TE, TM et ondes TEM:  $\beta = k$ , ce qui donne :  $\alpha_d = \frac{k \tan \delta}{2}$  [Np/m]

#### III.5.2.3. Fréquence de coupure

Les modes TE et TM se propagent à partir d'une certaine fréquence, dite fréquence de coupure  $f_c$ .

Une onde se propage seulement lorsque  $\beta$  est réel, qui se produit seulement lorsque  $k > k_c$ . Le mode TEM ne possède pas de fréquence de coupure.

Remarque, dans un guide, on veut seulement un seul mode qui se propage.

#### III.5.3. Guide parallèle plan

Les plaques parallèles forment le guide d'onde le plus simple; elles peuvent supporter des modes de propagation TE, TM et TEM.

Pour le mode TEM, l'impédance du milieu est donnée par :  $Z_0 = \frac{\eta d}{w}$

où  $\eta = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}$  est l'impédance intrinsèque du milieu. ( $\eta$  est constante et ne dépende que du milieu)

. La vitesse de phase est aussi constante :  $v_p = \frac{\omega}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}}$

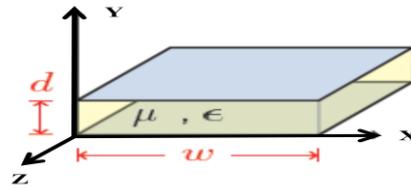


Figure III.10. Plaques parallèles La figure III(  $W \gg d$  ) .

**Pour les deux mode TE et TM:** la fréquence de coupure du mode  $n$  est obtenue par la condition  $k = k_c$ , ce qui donne :  $f_{c_n} = \frac{k_c}{2\pi\sqrt{\mu\epsilon}} = \frac{n}{2d\sqrt{\mu\epsilon}}$

### III.5.4. Guide rectangulaire

Le guide rectangulaire est un guide ayant un seul conducteur , et donc il ne peut pas supporter de mode TEM. Les modes TE et TM ayant des fréquences de coupure, ce type de guide a une fréquence minimale d'opération.

Nous avons présenté dans la figure III.12 un exemple de guide rectangulaire. On suppose que le guide est rempli d'un diélectrique ayant une perméabilité  $\mu$  et une permittivité  $\epsilon$ . Par convention, le côté le plus long du guide est sur l'axe  $x$ , ce qui donne  $a > b$ , avec  $a$  et  $b$  sont les cotés

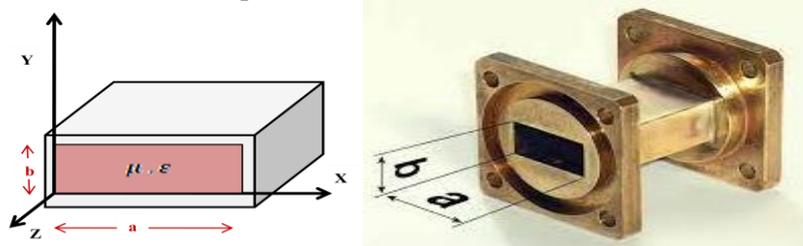


Figure III.12. Guide rectangulaire

**Pour le mode TE,** la constante de propagation est donnée par:  $\beta = \sqrt{k^2 - k_c^2} = \sqrt{k^2 - \left(\frac{m\pi^2}{a}\right)^2 - \left(\frac{n\pi^2}{b}\right)^2}$

Si  $k > k_c$  la constante de propagation est réelle, et alors la fréquence de coupure est égale à:

$$f_{c_{mn}} = \frac{k_c}{2\pi\sqrt{\mu\epsilon}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{\mu\epsilon}} \sqrt{\left(\frac{m\pi^2}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi^2}{b}\right)^2}$$

**Le mode dominant** est le mode ayant la fréquence de coupure la plus basse.

Puisque  $a > b$ , le mode dominant est  $TE_{10}$  ( $m = 1, n = 0$ ) :  $f_{c_{10}} = \frac{1}{2a\sqrt{\mu\epsilon}}$

Nous pouvons noter que: - Le mode  $TE_{00}$  n'existe pas. - Seulement les modes ayant ( $f_c < f$ ) vont se propager - Modes évanescentes sont des modes ayant ( $f_c > f$ ) seront fortement atténués .

**Définition:** Une onde évanescente est une onde plane dont l'amplitude diminue exponentiellement avec la distance à la source.

D'une manière générale, on veut qu'il n'y ait qu'un seul mode en propagation dans le guide, soit le mode  $TE_{10}$ . L'atténuation due au conducteur pour le mode  $TE_{10}$  est:  $\alpha_c = \frac{R_s}{a^3 b \beta k \eta} (2b\pi^2 + a^3 k^2)$

[ $Np/m$ ]

**Le Mode TM** possède la même constante de propagation et la même fréquence de coupure que le mode TE. Cependant, les modes  $TM_{00}$ ,  $TM_{10}$  et  $TM_{01}$  n'existent pas. Le plus bas mode TM qui se propage est  $TM_{11}$ .

### III.5.5. Guide circulaire (creux) :

Le guide d'ondes circulaire est un cylindre métallique, creux, de rayon  $a$ . Il est représenté dans le système de coordonnées de cylindriques sur la (figure III.14) ou l'axe  $z$  est toujours défini comme étant la direction de propagation.

Le mode de fonctionnement est similaire au guide rectangulaire



Figure III.14. Guide circulaire

**Pour le mode TE**, la constante de propagation est donnée par:  $\beta = \sqrt{k^2 - \left(\frac{p'_{nm}}{a}\right)^2}$

Où  $p'_{nm}$  est la  $m^{\text{ième}}$  racine de la dérivée des fonctions de Bessel,  $J'_n$ .

Alors la fréquence de coupure est:  $f_{c_{mn}} = \frac{k_c}{2\pi\sqrt{\mu\epsilon}} = \frac{p'_{nm}}{2\pi a\sqrt{\mu\epsilon}}$

Le premier mode à se propager dans un guide circulaire est celui qui a  $p'_{nm}$ , le premier mode TE à se propager est  $TE_{11}$ . Puisque  $m \geq 1$  le mode  $TE_{01}$  existe mais le mode  $TE_{10}$  n'existe pas.

L'atténuation pour le mode  $TE_{11}$  est :  $\alpha_c = \frac{R_s}{ak\beta\eta} \left( k_c^2 + \frac{k^2}{p_{11}^2 - 1} \right)$  [Np/m]

**Pour le mode TM** les équations ressemblent à celle du mode TE. La constante de propagation est

défini par:  $\beta = \sqrt{k^2 - \left(\frac{p_{nm}}{a}\right)^2}$

Avec  $p_{nm}$  est la  $m^{\text{ième}}$  racine des fonctions de Bessel,  $J_n$ .

La fréquence de coupure est donnée par:  $f_{c_{mn}} = \frac{k_c}{2\pi\sqrt{\mu\epsilon}} = \frac{p_{nm}}{2\pi a\sqrt{\mu\epsilon}}$

le premier mode à se propager est  $TM_{01}$  Cette valeur est plus grande que le plus petit  $p'_{nm}$ , et donc  $TE_{11}$  est le mode dominant du guide circulaire. Il n'y a pas de mode  $TM_{10}$ .

### III.5.6. Câble coaxial

Le câble coaxial est un autre type de guide d'ondes, est très utilisé en industrie. Il est constitué de deux conducteurs cylindriques séparés par un diélectrique, Typiquement, conducteur central contient le signal, et le conducteur externe sert de mise à terre (voir la figure III.16).

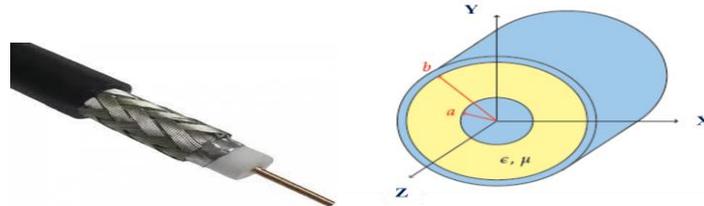


Figure III.16. Câble coaxial

Puisque le câble coaxial contient deux conducteurs, il peut supporter un mode TEM.

Son atténuation est :  $\alpha_c = \frac{1}{2} \left[ \frac{R_s}{\eta \ln(b/a)} \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) \right]$

-Les modes TE et TM sont habituellement évanescents à la fréquence d'utilisation du guide.

-Pour éviter la superposition des modes (c'est à dire la distorsion dans le signal transmis sur le câble), il faut connaître la fréquence de coupure des modes supérieurs.

**Remarque** : Le mode  $TE_{11}$  se propage sur un câble coaxial après le mode TEM. Sa fréquence de coupure est égale à:  $f_c = \frac{ck_c}{2\pi\sqrt{\epsilon_r}}$  Avec:  $k_c \approx \frac{2}{a+b}$