

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE  
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE  
UNIVERSITE CHADLI BENDJEDID-EL- TARF  
Faculté des Sciences et de la Technologie  
Département de Physique

**Polycopié**  
**ÉLECTROMAGNÉTISME**

**Cours**

**Licence - Deuxième Année : Physique**

***Dr. Selma TOUAM***

**MCA**

**Année: 2021-2022**

## Préface

Ce polycopié a été écrit à l'intention des étudiants de deuxième année des filières techniques et scientifiques des universités et écoles d'ingénieurs d'Algérie. Il correspond au programme officiel du module Electromagnétisme enseigné en deuxième année (L2-S4) de la filière Sciences de la Matière (SM) option Physique, avec un volume horaire global semestriel de 45h00(1h30 Cours+1.30TD /semaine)

L'objectif de ce manuscrit est de donner aux étudiants un support, afin qu'ils puissent comprendre les fondements de l'électromagnétisme.

Le manuscrit est composé de quatre chapitres:

Nous avons consacré le chapitre I à la présentation des outils mathématique et également nous avons présenté les théorèmes de Stokes, et de Gauss et la distribution Delta de Dirac.

Le deuxième chapitre est divisé en deux parties:

L'électrostatique, l'électrocinétique et la magnétostatique sont étudiée dans la première partie. Nous avons présenté la loi de Coulomb et le principe de superposition, le théorème de Gauss, Loi d'Ohm; Force de Lorentz et la loi de Biot-Savart...

Le régime variable est étudié dans la deuxième partie, Ce régime introduit les équations de Maxwell sous la forme d'une généralisation des équations locales obtenues en régime stationnaire. Après une présentation des phénomènes d'induction électromagnétique, la notion de courant de déplacement est introduite comme une nécessité permettant de respecter la relation de continuité. Les équations aux dérivées partielles pour le champ magnétique et le champ électrique sont obtenues à partir des équations de Maxwell. Les potentiels, vecteur et scalaire, la condition de jauge sont également montrés dans cette partie.

Le chapitre suivant consacré à la propagation des ondes électromagnétiques dans le vide. Les phénomènes de la réflexion et réfraction et les ondes guidées sont énoncés.

Rayonnement d'ondes électromagnétiques est traité dans le dernier chapitre qui se termine par théorème de réciproque

Formulaires dérivées et primitives des fonctions et quelques formules en prime, les opérations dérivées, primitives et quelques constantes fondamentales universelles en physique sont énoncés dans l'annexe.

Enfin, une bibliographie sommaire présente les principaux ouvrages utilisés pour la confection de ce manuel.

# *TABLE DES MATIÈRES*

## Table des Matières

<b>Chapitre I: Outils mathématique</b>	<b>02</b>
<b>I.1.Introduction</b>	<b>02</b>
<b>I.2. Rappels sur les vecteurs</b>	<b>02</b>
<b>I.2.1. Le produit scalaire</b>	<b>02</b>
<b>I.2. 2. Le produit vectoriel</b>	<b>03</b>
<b>I.2. 3. Le produit mixte</b>	<b>04</b>
<b>I.2.4. Double produit vectoriel</b>	<b>04</b>
<b>I.3.Dérivées partielles, différentielle d'une fonction</b>	<b>04</b>
<b>I.3.1.Dérivées partielles</b>	<b>04</b>
<b>I.3.2.Différentielle</b>	<b>05</b>
<b>I.4.Les opérateurs</b>	<b>05</b>
<b>1.4.1. Champ scalaire - Champ vectoriel</b>	<b>05</b>
<b>I.4.2.L'opérateur «nabla»</b>	<b>05</b>
<b>I.4.3.L'opérateur gradient</b>	<b>05</b>
<b>I.4.4.L'opérateur divergence</b>	<b>06</b>
<b>I.4.5.L'opérateur rotationnel</b>	<b>07</b>
<b>I.4.6. Laplacien scalaire</b>	<b>08</b>
<b>I.4.7.Laplacien vectoriel</b>	<b>09</b>
<b>I.5. Formules mathématiques très utiles</b>	<b>11</b>
<b>I.6. Théorème de Stokes-Théorème de Gauss</b>	<b>11</b>
<b>I.6.1. Circulation d'un champ vectoriel <math>\vec{V}</math> sur un contour</b>	<b>11</b>
<b>I.6.2. Flux(<math>\phi</math>) d'un champ vectoriel <math>\vec{V}</math> sur une surface</b>	<b>12</b>
<b>I.6.3.Théorèmes</b>	<b>13</b>
<b>I.6.3.1. Théorème de Stockes</b>	<b>13</b>
<b>I.6.3.2. Théorème de Gauss-Ostrogradski</b>	<b>15</b>
<b>I.7.Définition et propriétés de la distribution Delta de Dirac</b>	<b>15</b>
<b>I.7.1.Définition</b>	<b>15</b>
<b>I.7.2. Propriétés</b>	<b>16</b>
<b>Chapitre II : Équations de Maxwell</b>	<b>19</b>
<b>Partie 1: L'électrostatique, l'électrocinétique et la magnétostatique</b>	<b>19</b>



<b>II.1.A-Rappels et compléments sur l'électrostatique</b>	<b>19</b>
II.1.A.1.Définition	19
II.1.A.2. La loi de Coulomb ou principe fondamental de l'électrostatique	19
II.1.A.3. Le champ électrique	20
II.1.A.4 Principe de superposition	21
II.1.A.5. Distribution continue de charges – densité	21
II.1.A.5.1.Champ électrique créé par une distribution linéique de charges électriques	22
II.1.A.5.2.Champ électrique créé par une distribution surfacique de charges électriques	22
II.1.A.5.3.Champ électrique créé par une distribution volumique de charges électriques	23
II.1.A.6. Propriétés du champ électrostatique	24
II.1.A.6.1 Le potentiel électrostatique	24
II.1.A.6.2. Topographie d'un champ électrique	25
II.1.A.6.3. Le Théorème de Gauss	30
II.1.A.6.4.Application du théorème de Gauss	31
II.1.A.7. En résumé	39
<b>II.1.B- Rappels et compléments sur l'électrocinétique</b>	<b>40</b>
II-1.B.1.Définition	40
II-1.B.2.Vecteur densité de courant et l'intensité de courant	40
II-1.B.3. Densité surfacique du courant ( $\vec{j}_S$ )	41
II.1.B.4.Loi d'Ohm	42
II.1.B.4.1.Loi d'Ohm macroscopique	42
II.1.B.4.2. Loi d'Ohm microscopique (ou locale)	43
<b>II.1.C-Rappel et compléments sur la magnétostatique</b>	<b>45</b>
II.1.C.1.Définition	45
II.1.C.2.Force de Lorentz	45
II.1.C.3. Le champ magnétique	46
II.1.C.4.Le vecteur excitation magnétique	49
II.1.C.5. Potentiel vecteur $\vec{A}$	49
II.1.C.6. La loi de Biot-Savart	50
II.1.C.7. En résumé	54
<b>Partie 2. Le régime variable</b>	<b>55</b>
II-2.1. Introduction	55
II-2.2. Définition de l'induction électromagnétique	55

<b>II-2.3.</b> Loi de Faraday	<b>55</b>
<b>II.2.4.</b> Equation de Maxwell-Faraday	<b>55</b>
<b>II.2.5.</b> Le théorème de Maxwell-Ampère	<b>56</b>
<b>II.2.5.1</b> Le phénomène de capacité	<b>56</b>
<b>II.2.5.2</b> Le vecteur densité de courant de déplacement	<b>58</b>
<b>II.2.5.3</b> Le théorème de Maxwell-Ampère	<b>58</b>
<b>II.2.6.</b> Hypothèse de Maxwell	<b>59</b>
<b>II.2.7.</b> En résumé	<b>59</b>
<b>Chapitre III : Propagation des ondes électromagnétiques</b>	<b>61</b>
<b>III.1.</b> Equation de propagation pour $\vec{E}$ et $\vec{B}$ dans le vide	<b>61</b>
<b>III.2.</b> L'onde plane progressive sinusoïdale	<b>62</b>
<b>III.2.1.</b> Quelques définitions	<b>62</b>
<b>III.2.2.</b> Onde progressive	<b>62</b>
<b>III.2.3.</b> Représentation complexe	<b>63</b>
<b>III.2.4.</b> Structure de l'onde uniforme plane	<b>64</b>
<b>III.3.</b> Propagation des ondes électromagnétiques dans les métaux	<b>65</b>
<b>III.3. 1.</b> Propagation dans un milieu conducteur (non isolant)	<b>65</b>
<b>III.3. 1.1.</b> Temps de relaxation d'un conducteur	<b>65</b>
<b>III.3. 1.1.</b> Equation de propagation dans un conducteur	<b>65</b>
<b>III.3. 2.</b> Cas d'un milieu peu conducteur	<b>66</b>
<b>III.3. 3.</b> Cas d'un milieu très conducteur: EFFET DE PEAU	<b>67</b>
<b>III.3.4.</b> Propagation des ondes planes électromagnétiques dans les gaz ionisés à basse pression	<b>68</b>
<b>III.3.4. 1.</b> Définition d'un plasma	<b>68</b>
<b>III.3.4.2.</b> Equations de Maxwell dans le plasma	<b>69</b>
<b>III.3.4.3.</b> Relation de dispersion des ondes électromagnétiques planes progressives monochromatiques	<b>70</b>
<b>III.3.4. 4.</b> Structure de l'onde plane progressive harmonique	<b>71</b>
<b>III.4.</b> Réflexion et Réfraction	<b>72</b>
<b>III.4. 1.</b> Rappel: lois de la réflexion et de la réfraction	<b>72</b>
<b>III.4.2.</b> Incidence normale	<b>73</b>
<b>III. 4.3.</b> Incidence oblique : équations de Fresnel	<b>75</b>
<b>III. 4.4.</b> Cas de l'interface entre deux isolants magnétiques	<b>77</b>

III.4. 5. Réflexion et réfraction à la surface d'un bon conducteur	79
III.4. 6. Réflexion d'une onde électromagnétique par un gaz ionisé	81
III.5. Ondes guidées	82
III.5.1. Définition du guide d'onde	82
III.5.2. Solutions générales des ondes TEM, TE et TM	83
III.5.2.1. Les modes de propagations	84
III.5.2.2. Atténuation due aux pertes diélectriques	85
III.5.2.3. Fréquence de coupure	85
III.5.3. Guide parallèle plan	86
III.5.4. Guide rectangulaire	88
III.5.5. Guide circulaire (Creux)	90
III.5.6. Câble coaxial	93
<b>Chapitre IV : Rayonnement d'ondes électromagnétiques</b>	<b>96</b>
IV.1. Introduction	96
IV.2. Rayonnement d'un dipôle électrique oscillant	96
IV.2.1. Le potentiel	96
IV.2. 2. Le champ	97
IV.2. 3. La structure de l'onde	97
IV.2. 4. La puissance rayonnée à travers une sphère de rayon $r$	97
IV.2. 5. Interprétation microscopique de rayonnement dipolaire	98
IV.3 .Rayonnement d'une antenne, alignement d'antennes	102
IV.3.1. Définition	102
IV.3. 2. Dipôle court, Dipôle demi-onde	102
IV.4. Quadripôle électrique et dipôle magnétique	108
IV.5. Rayonnement d'un quadripôle magnétique	110
IV.5. 1. Définition	110
IV.5. 2. Le champ créé par un quadripôle magnétique	110
IV.6. Théorème de réciproque	112
Annexe	115
Références Bibliographique	119

## CHAPITRE I

### *Outils mathématiques*



**Paul Adrien Maurice Dirac**

(8 août 1902 à Bristol, Angleterre 20 octobre 1984 à Tallahassee, Floride, États-Unis) est un mathématicien et physicien britannique. Il est l'un des « pères » de la mécanique quantique et a prévu l'existence de l'antimatière. Il est colauréat avec Erwin Schrödinger du prix Nobel de physique de 1933 « pour la découverte de formes nouvelles et utiles de la théorie atomique ».

**I.1.Introduction :**

Les lois de l'électromagnétisme sont basées sur des notions mathématiques, Ce chapitre présente les définitions et les propriétés qui sont utilisées en électromagnétisme telles que: la notion de champ et celle d'opérateurs vectoriels, les trois objets mathématiques qui agissent sur ces champs qui sont: le gradient, la divergence et le rotationnel.

**I.2. Rappels sur les vecteurs :**

Soit  $f(x, y, z)$  une fonction scalaire des variables  $(x, y, z)$ .

$\vec{A}(A_x, A_y, A_z)$  ,  $\vec{B}(B_x, B_y, B_z)$ ,  $\vec{C}(C_x, C_y, C_z)$  Désignent des champs vectoriels, chaque composante est un champ scalaire dépendant des variables spatiales  $(x, y, z)$ .

**I.2.1. Le produit scalaire:**

On appelle produit scalaire des vecteurs  $\vec{A}$  et  $\vec{B}$ , noté  $\vec{A} \cdot \vec{B}$ , le scalaire égal au produit des normes des deux vecteurs par le cosinus de l'angle entre les deux vecteurs entre les deux vecteurs  $\alpha = \widehat{(\vec{A}, \vec{B})}$  soit encore :

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z = \|\vec{A}\| \times \|\vec{B}\| \cos(\vec{A}, \vec{B}) \quad (\text{I.1})$$

$$\|\vec{A}\|^2 = \vec{A}^2 = \vec{A} \cdot \vec{A} = A_x^2 + A_y^2 + A_z^2 \quad (\text{I.2})$$

**Exemple 1:**

$\vec{A}$  et  $\vec{B}$  deux vecteurs

Avec :  $\vec{A} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}$  et  $\vec{B} = 3\vec{i} - 2\vec{j} + 4\vec{k}$

Trouver  $\vec{A} \cdot \vec{B}$  et  $\widehat{AB}$

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = (2) \cdot (3) + (3) \cdot (-2) + (-1)(4) = -4 \quad (\text{I.3})$$

$$|\vec{A}| = \sqrt{(2)^2 + (3)^2 + (-1)^2} = \sqrt{14} \quad (\text{I.4})$$

$$|\vec{B}| = \sqrt{(3)^2 + (-2)^2 + (4)^2} = \sqrt{29} \quad (\text{I.5})$$

$$\cos \alpha = \frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{|\vec{A}| \cdot |\vec{B}|} = \frac{-4}{\sqrt{14} \cdot 29} \Rightarrow \alpha = 101.45^\circ \quad (\text{I.6})$$

**Propriétés:**

-Lorsque  $\vec{A}$  ou  $\vec{B}$  est nul ,  $\vec{A} \cdot \vec{B} = \mathbf{0}$ .

-lorsqu'aucun des vecteurs n'est nul mais les deux vecteurs sont orthogonaux  $\vec{A} \perp \vec{B}$ ,  $\alpha = \widehat{(\vec{A}, \vec{B})} = \pm \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos(\alpha) = 0$  d'où  $\vec{A} \cdot \vec{B} = 0$ .

-Le produit scalaire de deux vecteurs est un nombre positif ou négatif.

-La **multiplication scalaire** entre deux vecteurs est **commutative** c.-à-d

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = \vec{B} \cdot \vec{A} \quad (\text{I.7})$$

-La **multiplication scalaire** entre deux vecteurs est **distributive par rapport à l'addition vectorielle** c.-à-d.  $\vec{A} \cdot (\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A} \cdot \vec{B} + \vec{A} \cdot \vec{C}$ . (I.8)

### I.2. 2. Le produit vectoriel :

$\vec{A}$  et  $\vec{B}$  étant deux vecteurs de l'espace vectoriel, Le produit vectoriel de deux vecteurs  $\vec{A}$  et  $\vec{B}$  est un vecteur :

$$\vec{A} \wedge \vec{B} = (A_y B_z - A_z B_y, \quad A_z B_x - A_x B_z, \quad A_x B_y - A_y B_x) \quad (\text{I.9})$$

$\vec{A} \wedge \vec{B}$  est un vecteur orthogonal à la fois à  $\vec{A}$  et à  $\vec{B}$

$$\text{Sa norme est définie par : } \|\vec{A} \wedge \vec{B}\| = \|\vec{A}\| \times \|\vec{B}\| \sin(\widehat{(\vec{A}, \vec{B})}) \quad (\text{I.10})$$

$\|\vec{A} \wedge \vec{B}\|$  Représente l'aire du parallélogramme généré par  $\vec{A}, \vec{B}$

**Orientation du produit vectoriel :**

**Règle des trois doigts:** pour une particule de charge positive, de vitesse orientée selon le pouce dans un champ magnétique orienté selon l'index, la force est orientée selon le médium.

Alors : la main droite:  $\vec{A} = \text{pouce}$ ,  $\vec{B} = \text{index}$ ,  $\vec{A} \wedge \vec{B} = \text{majeur}$

#### Exemple 2:

Calculer  $\vec{A} \wedge \vec{B}$

Avec  $\vec{A} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}$  et  $\vec{B} = 3\vec{i} - 2\vec{j} + 4\vec{k}$

$$\vec{A} \wedge \vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 3 & -1 \\ 3 & -2 & 4 \end{vmatrix} \quad (\text{I.11})$$

$$\vec{A} \wedge \vec{B} = [(3) \cdot (4) - (1) \cdot (-2)]\vec{i} - [(2)(4) - (-1)(3)]\vec{j} + [(2) \cdot (-2) - (3) \cdot (3)]\vec{k} \quad (\text{I.12})$$

$$\vec{A} \wedge \vec{B} = 10\vec{i} - 11\vec{j} - 13\vec{k} \quad (\text{I.13})$$

#### Propriétés:

-Le produit vectoriel de deux vecteurs colinéaires est nul.  $\vec{A} \wedge \vec{B} = \vec{0}$

-Si  $\vec{A} \neq \vec{0}$  et  $\vec{B} \neq \vec{0}$  ne sont pas colinéaires,  $\vec{A} \wedge \vec{B} \neq \vec{0}$

-La **multiplication vectorielle** entre deux vecteurs est **anticommutative** c'est à dire :

$$\vec{A} \wedge \vec{B} = -(\vec{B} \wedge \vec{A}) \quad (\text{I.14})$$

-La **multiplication vectorielle** entre deux vecteurs est **distributive par rapport à l'addition vectorielle** c.-à-d.  $\vec{A} \wedge (\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A} \wedge \vec{B} + \vec{A} \wedge \vec{C}$ . (I.15)

### I.2. 3. Le produit mixte :

Soient  $\vec{A}, \vec{B}$  et  $\vec{C}$  trois vecteurs de l'espace orienté. Le produit mixte de trois vecteurs est un nombre réel qu'on appelle aussi le déterminant de ces trois vecteurs.

$$\text{On définit leur produit mixte par : } [\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}] = \vec{A} \cdot (\vec{B} \wedge \vec{C}) \quad (\text{I.16})$$

La valeur absolue du produit mixte  $\|\vec{A} \cdot (\vec{B} \wedge \vec{C})\|$  Représente le volume du prisme droit généré par les trois vecteurs  $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}$ .

#### *Propriétés:*

-Le produit mixte est invariant par permutation circulaire c.-à-d. que :

$$\vec{A} \cdot (\vec{B} \wedge \vec{C}) = \vec{C} \cdot (\vec{A} \wedge \vec{B}) = \vec{B} \cdot (\vec{C} \wedge \vec{A}) \quad (\text{I.17})$$

- Si  $\vec{A}, \vec{B}$  et  $\vec{C}$ . Sont coplanaires, ou si un des trois vecteurs au moins est nul,  $\vec{A} \cdot (\vec{B} \wedge \vec{C}) = 0$ .

-Si  $\vec{A} \neq \vec{0}, \vec{B} \neq \vec{0}$  et  $\vec{C} \neq \vec{0}$  ne sont pas coplanaires,  $\vec{A} \cdot (\vec{B} \wedge \vec{C}) \neq 0$

### I.2.4. Double produit vectoriel :

Le double produit vectoriel de trois vecteurs est un vecteur est défini par la formule suivante :

$$\vec{A} \wedge (\vec{B} \wedge \vec{C}) = (\vec{A} \cdot \vec{C})\vec{B} - (\vec{A} \cdot \vec{B})\vec{C} \quad (\text{I.18})$$

## I.3. Dérivées partielles, différentielle d'une fonction :

### I.3.1. Dérivées partielles :

$f(x, y, z)$  est une fonction des variables spatiales  $x, y, z$

$\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$  et  $\frac{\partial f}{\partial z}$  sont les dérivées de la fonction  $f(x, y, z)$  par rapport à  $x, y$  et  $z$  respectivement

(Par exemple dans les calculs  $\frac{\partial f}{\partial x}$  est la dérivée de  $f$  par rapport à  $x$  en considérant  $y$  et  $z$  comme des constantes).

**I.3.2. Différentielle :**

La différentielle de  $f(x, y, z)$  est donnée par la relation suivante :

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz \quad (\text{I.19})$$

Cette relation représente la variation de  $f(x, y, z)$  lorsque  $x$  varie de  $x$  à  $x + dx$ ,  $y$  de  $y$  à  $y + dy$  et  $z$  de  $z$  à  $z + dz$ .

**I.4. Les opérateurs :****I.4.1. Champ scalaire - Champ vectoriel :**

Soit un trièdre orthonormé  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  et  $M$  un point de l'espace, de coordonnées cartésiennes  $(x, y, z)$ .

Le vecteur position qui définit le point  $M$  dans cette base est :  $\vec{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$  (I.20)

La fonction  $f(M)$  est dite fonction scalaire de point ou champ scalaire si :  $f(M) = f(x, y, z)$

Le vecteur  $\vec{V}(M)$  est dit fonction vectorielle de point ou champ vectoriel si :

$$\vec{V}(M) = V_x(x, y, z)\vec{i} + V_y(x, y, z)\vec{j} + V_z(x, y, z)\vec{k} \quad (\text{I.21})$$

**I.4.2. L'opérateur «nabla» :**

L'opérateur nabla est un vecteur symbolique noté  $\vec{\nabla}$  et dont l'expression en coordonnées cartésiennes est:

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k} \quad (\text{I.22})$$

L'opérateur nabla est utilisé pour écrire de manière plus compacte les opérateurs vectoriels.

**I-4.3. L'opérateur gradient : (Gradient d'un champ scalaire) :**

Le gradient noté  $(\vec{grad})$  est un opérateur agissant sur un champ scalaire  $f(M)$  pour former un champ vectoriel. L'expression de cet opérateur dépend du système de coordonnées que l'on adopte.

-Dans le système de coordonnées cartésienne  $M(x, y, z)$ , repère  $Oxyz$   $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$  (ou  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ )

$$\vec{grad}(f) = \vec{\nabla}f = \frac{\partial f}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{e}_z \quad (\text{I.23})$$

-Dans le système de coordonnées polaires  $M(r, \theta)$  planes, repère mobile  $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$



$$\overrightarrow{\text{grad}}(f) = \vec{\nabla}f = \frac{\partial f}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \vec{e}_\theta \quad (\text{I.24})$$

**Remarque:**

Les coordonnées polaires sont les coordonnées cylindriques sans la 3<sup>ème</sup> dimension  $z$

-Dans le système de coordonnées cylindriques  $M(r, \theta, z)$ , trièdre mobile  $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$

$$\overrightarrow{\text{grad}}(f) = \vec{\nabla}f = \frac{\partial f}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{e}_z \quad (\text{I.25})$$

Dans le système de coordonnées sphériques  $M(r, \theta, \varphi)$ , trièdre mobile  $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi)$

$$\overrightarrow{\text{grad}}(f) = \vec{\nabla}f = \frac{\partial f}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \vec{e}_\varphi \quad (\text{I.26})$$

**Exemple 3 :**

Trouver  $\overrightarrow{\text{grad}}(f)$  au point  $M(1, 2, -3)$  avec  $f = x^2 \cdot y \cdot z$

$$\text{On a : } \overrightarrow{\text{grad}}(f) = \vec{\nabla}f = \frac{\partial f}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{e}_z \quad (\text{I.27})$$

$$\overrightarrow{\text{grad}}(f) = \vec{\nabla}f = (2x \cdot y \cdot z) \vec{e}_x + (x^2 \cdot z) \vec{e}_y + (x^2 \cdot y) \vec{e}_z$$

$$\text{En remplaçant par les coordonnées : } \overrightarrow{\text{grad}}(f) = \vec{\nabla}f = (-12) \vec{e}_x + (-3) \vec{e}_y + (2) \vec{e}_z \quad (\text{I.28})$$

**I.4.4.L'opérateur divergence : (Divergence d'un champ vectoriel) :**

La **divergence** notée  $\text{div}(\vec{V})$  est un opérateur agissant sur un champ de vecteurs  $\vec{V}(M)$  pour former un champ scalaire

L'expression de la **divergence** dépend du système de coordonnées que l'on adopte.

-Dans le système de coordonnées cartésienne :

$$\text{div}(\vec{V}) = \vec{\nabla} \cdot \vec{V} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \quad (\text{I.29})$$

-Dans le système de coordonnées polaires

$$\text{div}(\vec{V}) = \vec{\nabla} \cdot \vec{V} = \frac{1}{r} \frac{\partial(r v_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial(v_\theta)}{\partial \theta} \quad (\text{I.30})$$

-Dans le système de coordonnées cylindriques

$$\text{div}(\vec{V}) = \vec{\nabla} \cdot \vec{V} = \frac{1}{r} \frac{\partial(r v_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial(v_\theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial(v_z)}{\partial z} \quad (\text{I.31})$$

-Dans le système de coordonnées sphériques

$$\operatorname{div}(\vec{V}) = \vec{\nabla} \cdot \vec{V} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 v_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(\sin \theta v_\theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} \quad (\text{I.32})$$

**Exemple 4 :**

Trouver  $\operatorname{div} \vec{V}$  au point M (1, -2, 3) avec  $\vec{V} = (x.y)\vec{e}_x + (y.z)\vec{e}_y + (x.z)\vec{e}_z$  (I.33)

On a :  $\operatorname{div}(\vec{V}) = \vec{\nabla} \cdot \vec{V} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$  (I.34)

Donc :  $\operatorname{div}(\vec{V}) = \vec{\nabla} \cdot \vec{V} = x.y.z = (-2) + (3) + (1) = 2$  (I.35)

**I.4.5.L'opérateur rotationnel : (Rotationnel d'un champ vectoriel) :**

Le **rotationnel** noté  $\overrightarrow{\operatorname{rot}}(\vec{V})$  est un opérateur agissant sur un champ de vecteurs  $\vec{V}(M)$  pour former un champ vectoriel.

L'expression de cet opérateur dépend du système de coordonnées que l'on adopte.

- Dans le système de coordonnées cartésienne :

$$\overrightarrow{\operatorname{rot}}(\vec{v}) = \vec{\nabla} \times \vec{V} = \left[ \frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \right] \vec{e}_x + \left[ \frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \right] \vec{e}_y + \left[ \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right] \vec{e}_z \quad (\text{I.36})$$

-Dans le système de coordonnées polaires

$$\overrightarrow{\operatorname{rot}}(\vec{V}) = \vec{\nabla} \times \vec{V} = \frac{1}{r} \left( \frac{\partial(r v_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial(v_r)}{\partial \theta} \right) \vec{e}_z \quad (\text{I.37})$$

-Dans le système de coordonnées cylindriques

$$\overrightarrow{\operatorname{rot}}(\vec{V}) = \vec{\nabla} \times \vec{V} = \left( \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} - \frac{\partial(v_\theta)}{\partial z} \right) \vec{e}_r + \left( \frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) \vec{e}_\theta + \frac{1}{r} \left( \frac{\partial(r v_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right) \vec{e}_z \quad (\text{I.38})$$

-Dans le système de coordonnées sphériques

$$\overrightarrow{\operatorname{rot}}(\vec{V}) = \vec{\nabla} \times \vec{V} = \frac{1}{r \sin \theta} \left( \frac{\partial(\sin \theta v_\varphi)}{\partial \theta} - \frac{\partial v_\theta}{\partial \varphi} \right) \vec{e}_r + \frac{1}{r} \left( \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial(r v_\varphi)}{\partial r} \right) \vec{e}_\theta + \frac{1}{r} \left( \frac{\partial(r v_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right) \vec{e}_\varphi \quad (\text{I.39})$$

**Exemple 5 :**

Trouver  $\overrightarrow{\operatorname{rot}}(\vec{V})$  avec  $\vec{V} = (x.y)\vec{e}_x + (y.z)\vec{e}_y + (x.z)\vec{e}_z$  (I.40)

$$\text{On a : } \vec{\nabla} \times \vec{V} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix} \quad (\text{I.41})$$

$$\text{Donc } \text{rot}(\vec{v}) = \vec{\nabla} \times \vec{V} = \left[ \frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \right] \vec{e}_x + \left[ \frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \right] \vec{e}_y + \left[ \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right] \vec{e}_z \quad (\text{I.42})$$

$$\text{rot}(\vec{v}) = \vec{\nabla} \times \vec{V} = (0 - y)\vec{e}_x + (0 - z)\vec{e}_y + (0 - x)\vec{e}_z \quad (\text{I.43})$$

La figure 1.1 illustre quelques exemples de champs particuliers

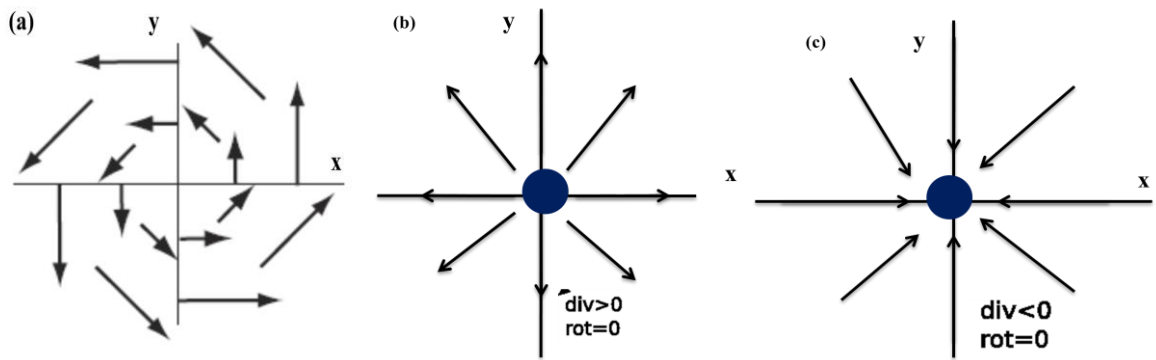


Figure 1.1. Divergence nulle et un rotationnel non nul (1.a), Divergence non nulle est positive mais un rotationnel nul (1.b), Divergence non nulle est négative mais un rotationnel nul (1.c)

### I.4.6. Laplacien scalaire:

$f$  étant une fonction scalaire de point. On appelle laplacien scalaire de  $f$ , noté  $\Delta f$  ou  $lap(f)$  la

$$\text{divergence du gradient de } f \text{ défini par : } \Delta f = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} f) = \text{div}(\overrightarrow{\text{grad}}(f)) = \nabla^2(f) \quad (\text{I.44})$$

$\nabla^2$  se lit «delta»

-Dans un système de coordonnées cartésiennes, il s'écrit :

$$\Delta f = \vec{\nabla}^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \text{div}(\overrightarrow{\text{grad}} f) \quad (\text{I.45})$$

-Dans un système de coordonnées polaires, il s'écrit:

$$\Delta f = \frac{1}{r} \left( \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial f}{\partial r} \right) \right) \vec{e}_r + \frac{1}{r^2} \left( \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} \right) \vec{e}_\theta \quad (\text{I.46})$$

Dans un système de coordonnées cylindriques :

$$\Delta f = \frac{1}{r} \left( \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{r \partial f}{\partial r} \right) \right) \vec{e}_r + \frac{1}{r^2} \left( \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} \right) \vec{e}_\theta + \left( \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \right) \vec{e}_z \quad (\text{I.47})$$

Dans un système de coordonnées sphériques:

$$\Delta f = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) \vec{e}_r + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) \vec{e}_\theta + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \left( \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} \right) \vec{e}_\varphi \quad (\text{I.48})$$

### Exemple 6 :

Trouver  $\vec{\nabla}^2 f$  avec  $f = x^2 y + y^2 x z + z^2 y$  (I.49)

On a  $\Delta f = \vec{\nabla}^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$  (I.50)

Donc:  $\vec{\nabla}^2 f = 2y + 2xz + 2y$  (I.51)

$\vec{\nabla}^2 f = 4y + 2xz$  (I.52)

### I.4.7. Laplacien vectoriel:

Le laplacien vectoriel (noté  $\vec{\Delta}$  ou  $\overline{\text{lap}}$ ) d'un champ vectoriel  $\vec{v}$  est un champ vectoriel défini par :  $\vec{\Delta} \vec{V} = \overline{\text{grad}}[\text{div}(\vec{V})] - \overline{\text{rot}}[\text{rot}(\vec{V})] = \nabla^2 \vec{V} = \vec{\nabla} \vec{\nabla} \cdot (\vec{V}) - \vec{\nabla} \times [\vec{\nabla} \times \vec{V}]$  (I.53)

En coordonnées cartésiennes, on peut écrire  $\vec{\Delta} \vec{V} = (\Delta V_x ; \Delta V_y ; \Delta V_z)$  ou  $\Delta$  est le Laplacien scalaire; ce n'est pas vrai dans les autres systèmes de coordonnées (cylindriques et sphériques).

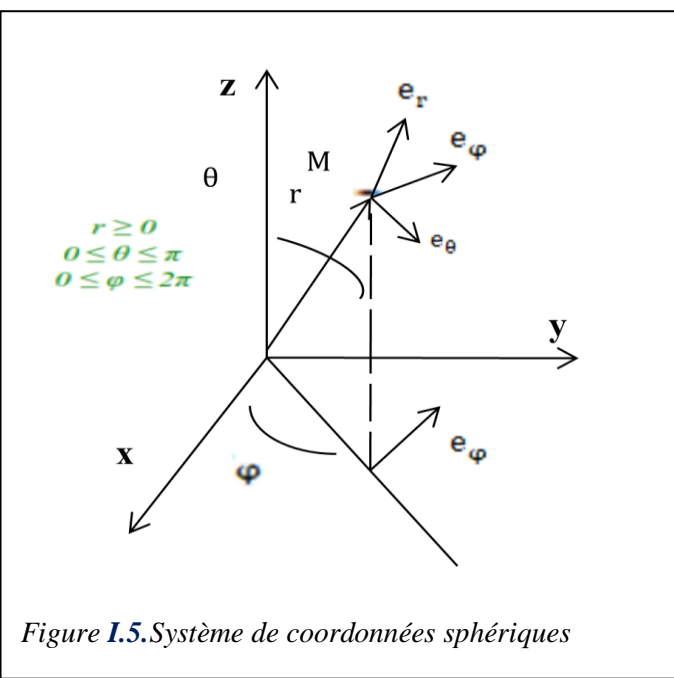
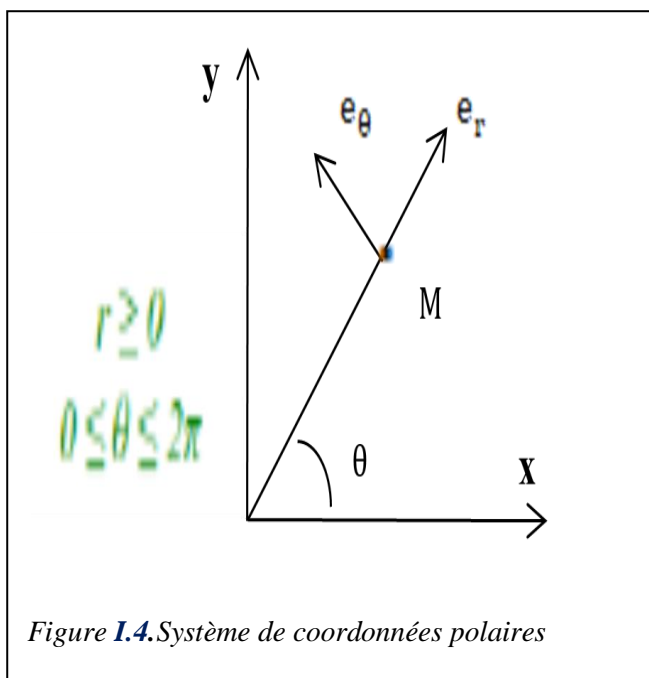
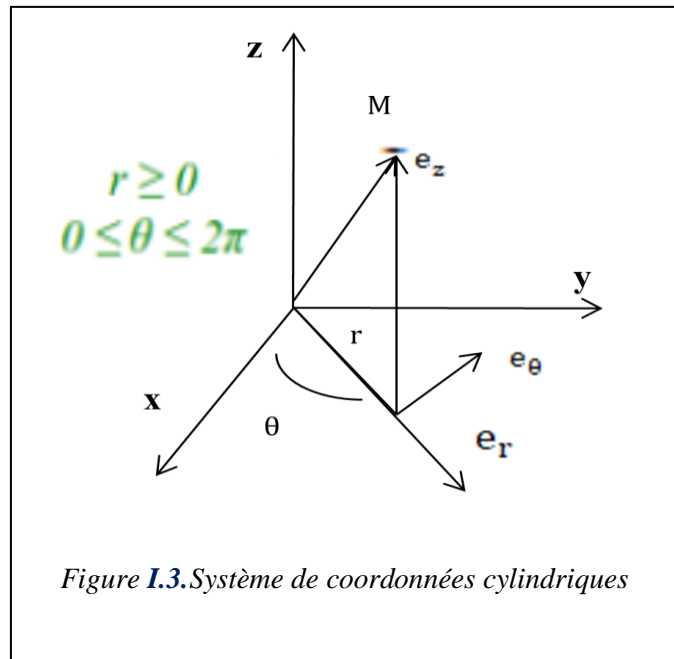
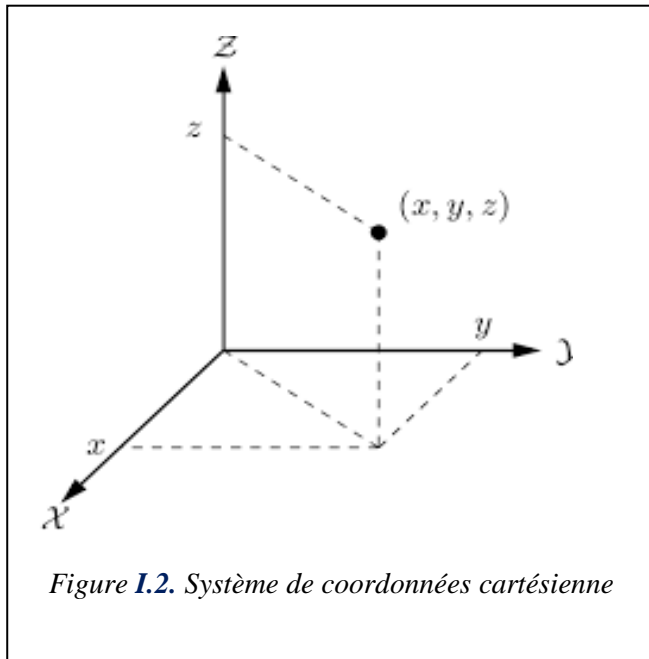
$$\vec{\Delta} \begin{cases} \Delta V_x = \frac{\partial^2 V_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial z^2} \\ \Delta V_y = \frac{\partial^2 V_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_y}{\partial z^2} \\ \Delta V_z = \frac{\partial^2 V_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_z}{\partial z^2} \end{cases} \quad (\text{I.54})$$

Dans la formule précédente on dérive deux fois chaque coordonnée par rapport à chaque variable et on additionne le tout.

### Remarque:

Le laplacien s'applique à un champ scalaire ou vectoriel et le résultat est de même nature.

Les figures I.2, I.3, I.4 et I.5 représentent les systèmes de coordonnées cartésiennes, cylindriques, polaire et sphériques respectivement.



Figures I.12.3.4.5 Systèmes de coordonnées cartésiennes, cylindriques, polaire et sphériques

### I.5. Formules mathématiques très utiles:

Mentionnons quelques formules mathématiques de ces opérateurs.

$$\text{Le rotationnel d'un gradient est nul: } \overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{grad}} f) = \overrightarrow{\nabla} \wedge (\overrightarrow{\nabla} f) = \overrightarrow{0} \quad (\text{I.55})$$

La divergence d'un rotationnel d'un champ est toujours nulle :

$$\text{div}(\overrightarrow{\text{rot}} \overrightarrow{V}) = (\overrightarrow{\nabla} \wedge \overrightarrow{V}) = \overrightarrow{0} \quad (\text{I.56})$$

Divergence et rotationnelle du produit  $(f \overrightarrow{V})$  d'un champ scalaire  $f$  par un champ vectoriel  $\overrightarrow{V}$ :

$$\text{div}(f \overrightarrow{V}) = f \text{div} \overrightarrow{V} + \overrightarrow{\text{grad}} f \cdot \overrightarrow{V} \quad \overrightarrow{\text{rot}}(f \overrightarrow{V}) = f \overrightarrow{\text{rot}} \overrightarrow{V} + \overrightarrow{\text{grad}} f \wedge \overrightarrow{V} \quad (\text{I.57})$$

**Cas particulier:** si  $\overrightarrow{V}$  est un vecteur fixe indépendant des coordonnées de l'espace :

$$\text{div}(f \overrightarrow{V}) = \overrightarrow{\text{grad}} f \cdot \overrightarrow{V} \quad \overrightarrow{\text{rot}}(f \overrightarrow{V}) = \overrightarrow{\text{grad}} f \wedge \overrightarrow{V} \quad (\text{I.58})$$

$$\text{Divergence d'un produit vectoriel : } \text{div}(\overrightarrow{V} \wedge \overrightarrow{u}) = \overrightarrow{u} \overrightarrow{\text{rot}} \overrightarrow{V} - \overrightarrow{V} \overrightarrow{\text{rot}} \overrightarrow{u} \quad (\text{I.59})$$

$$\text{Carré d'un champ vectoriel: } \overrightarrow{\text{grad}}(\overrightarrow{V}^2) = \overrightarrow{V} \wedge \overrightarrow{\text{rot}} \overrightarrow{V} + (\overrightarrow{V} \wedge \overrightarrow{\text{grad}}) \overrightarrow{V} \quad (\text{I.60})$$

$$\text{Rotationnel du rotationnel d'un champ: } \overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}} \overrightarrow{V}) = \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div} \overrightarrow{V}) - \Delta \overrightarrow{V} \quad (\text{I.61})$$

### I.6. Théorème de Stokes-Théorème de Gauss :

#### I.6.1. Circulation d'un champ vectoriel $\overrightarrow{V}$ sur un contour :

On définit la circulation d'un champ vectoriel  $\overrightarrow{V}$  sur un contour  $(C)$  entre le point de départ  $A$  et le point d'arrivée  $B$  par l'intégrale curviligne:

$$C_{AB}(\overrightarrow{V}) = \int_{AB} \overrightarrow{V} \cdot d\overrightarrow{l} \quad (\text{I.62})$$

Où  $d\overrightarrow{l}$  désigne un élément de contour ( $d\overrightarrow{l}$  est tangent au contour en tout point).

#### Remarque :

**1-** Si le contour est fermé, alors  $A = B$  et le signe  $\int$  est barré d'un rond et la circulation s'écrit:  $C(\overrightarrow{V}) = \oint \overrightarrow{V} \cdot d\overrightarrow{l}$  (I.63)

**2-** Si  $\overrightarrow{V}$  est un champ défini par:  $\overrightarrow{V} = \overrightarrow{\text{grad}} f$  où  $f$  est une fonction "potentiel", alors le champ vectoriel  $\overrightarrow{V}$  dont la circulation est nulle sur tout contour fermé est dit : à circulation conservative. Par exemple: champ électrostatique, champ de pesanteur ...

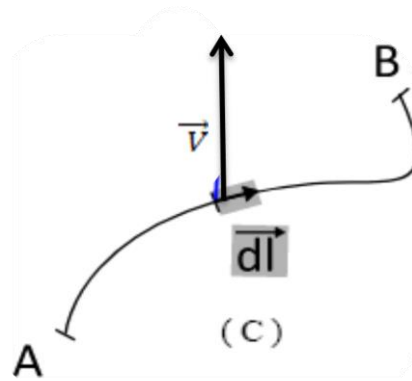


Figure I.6. Circulation sur un contour

**Exemple 7.**

Calculer  $\int_C \vec{V} \cdot d\vec{l}$  entre le point de départ A (0, 0, 0) et le point d'arrivée B (1, 2, 4)

$$\text{Avec } \vec{V} = x^2 \vec{e}_x + y \vec{e}_y + (xz - y) \vec{e}_z \quad (\text{I.64})$$

-Pour calculer l'intégrale  $\int_C \vec{V} \cdot d\vec{l}$ , nous avons utilisé un argument variable t:

$$\text{Avec: } t = \frac{(x-x_0)}{(x_1-x_0)} = \frac{(y-y_0)}{(y_1-y_0)} = \frac{(z-z_0)}{(z_1-z_0)} \quad (\text{I.65})$$

$(x_0, y_0, z_0)$  sont les coordonnées du point de départ A et  $(x_1, y_1, z_1)$  sont les coordonnées du point d'arrivée.

$$\text{Donc: } t = \frac{(x-0)}{(1-0)} \Rightarrow x = t \quad (\text{I.66})$$

$$t = \frac{(y-0)}{(2-0)} \Rightarrow y = 2t \quad (\text{I.67})$$

$$t = \frac{(z-0)}{(4-0)} \Rightarrow z = 4t \quad (\text{I.68})$$

$$\text{Alors: } C_{\overline{AB}}(\vec{V}) = \int_{\overline{AB}} \vec{V} \cdot d\vec{l} = \int_C x^2 dx + y dy + (xz - y) dz \quad (\text{I.69})$$

$$C_{\overline{AB}}(\vec{V}) = \int_0^1 t dt + (2t)(2dt) + (4t^2 - 2t)(4dt) \quad (\text{I.70})$$

$$C_{\overline{AB}}(\vec{V}) = \int_0^1 (17t^2 - 4t)(dt) = 11/3 \quad (\text{I.71})$$

**I.6.2. Flux( $\phi$ ) d'un champ vectoriel  $\vec{V}$  sur une surface:**

Le flux d'un vecteur  $\vec{V}$  à travers une surface (S) est donné par l'intégrale double:

$$\Phi_{/S}(\vec{V}) = \iint_{(S)} \vec{V} \cdot d\vec{S} \quad (\text{I.72})$$

Si  $d\vec{S}$  désigne un élément de surface et  $\vec{n}$  désigne la normale à la surface ( $d\vec{S} = \vec{n} dS$ )

Alors:

$$\phi_{/s}(\vec{V}) = \iint_{(s)} \vec{V} \cdot \vec{n} \, dS \quad (\text{I.73})$$

### Remarque:

Quand il s'agit d'une surface délimitée par un contour (C), l'intégrale est dénotée  $\oiint_S$ , le vecteur  $\vec{n}$  est orienté vers l'extérieur de la surface.

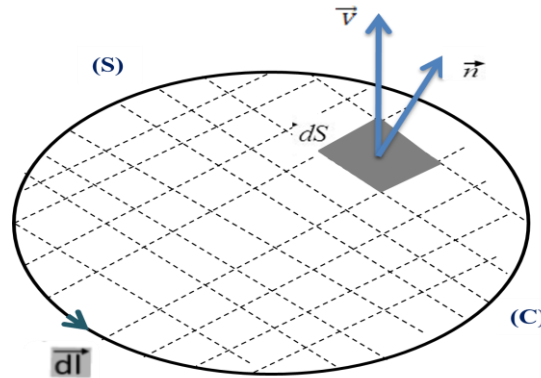


Figure I.7. Surface délimitée par un contour (C)

## I.6.3. Théorèmes

### I.6.3.1. Théorème de Stokes

Soit (C) un contour fermé et orienté et (S) une surface s'appuyant sur ce contour.

Le théorème de Stokes s'énonce:

La circulation d'un vecteur  $\vec{V}$  le long de ce contour fermé est égal au flux du rotationnel du champ de vecteur  $\vec{V}$  à travers la surface (S) s'appuyant sur le contour (C).

$$C(\vec{V}) = \phi_{/s}(\overrightarrow{\text{rot}} \vec{V}) \quad (\text{I.74})$$

$$C(\vec{V}) = \oint \vec{V} \cdot d\vec{l} = \iint_{(s)} \overrightarrow{\text{rot}} \vec{V} \cdot \vec{n} \cdot dS \quad (\text{I.75})$$

Le vecteur unitaire  $\vec{n}$  est orienté selon la convention du tire-bouchon de Maxwell.



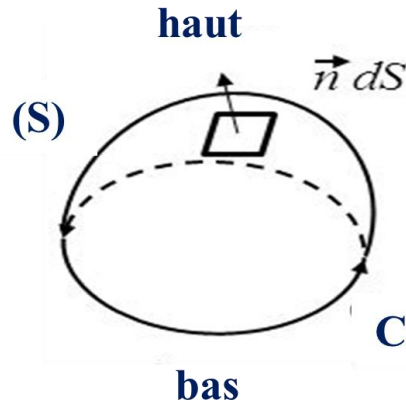


Figure I.8. Un contour(C) fermé et orienté et (S) une surface s'appuyant sur (C)

### Exemple 8:

Trouver l'intégrale surfacique du vecteur  $\vec{V} = \vec{i} + xy\vec{j}$  (I.76)

La surface est définie par:  $\begin{cases} x = u + v \\ y = u - v \\ z = u^2 \end{cases}$  (I.77)

Avec  $\begin{cases} 0 \leq u \leq 1 \\ 0 \leq v \leq 1 \end{cases}$  (I.78)

On a :  $\iint_{(S)} \vec{V} \cdot \vec{n} dS = \iint_{(S)} V \cdot \frac{\partial R}{\partial u} \times \frac{\partial R}{\partial v} du dv$  (I.79)

$$\int_0^1 \int_0^1 \begin{vmatrix} 1 & u^2 - v^2 & 0 \\ 1 & 1 & 2u \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} du dv \quad (I.80)$$

$$\text{Alors : } \begin{vmatrix} 1 & u^2 - v^2 & 0 \\ 1 & 1 & 2u \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 1(2u) - (u^2 - v^2)(-2u) + 0 = 2u^3 - 2uv^2 + 2u \quad (I.81)$$

$$\int_0^1 \int_0^1 (2u^3 - 2uv^2 + 2u) du dv \quad (I.82)$$

$$\int_0^1 \left[ \frac{2u^4}{4} - \frac{2v^2 u^2}{2} + \frac{2u^2}{2} \right] du dv = \frac{1}{0} \left[ \frac{u^4}{2} - v^2 u^2 + u^2 \right] = \int_0^1 \left( \frac{1}{2} - v^2 + 1 \right) dv \quad (I.83)$$

$$\int_0^1 \left[ \frac{1}{2} - \frac{v^3}{2} + 1 \right] dv = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + 1 = \frac{7}{6} \quad (I.84)$$

### I.6.3.2. Théorème de Gauss-Ostrogradski (Ou théorème de la divergence) :

Soit une surface fermée entourant un volume  $\Gamma$ . Le théorème d'Ostrogradski s'énonce :

Le flux d'un champ vectoriel  $\vec{V}$ , à travers une surface fermée ( $S$ ) est égal à l'intégrale triple de sa divergence dans le volume ( $\Gamma$ ) limité par la surface fermée ( $S$ ):

$$\oint_{(S)} \vec{V} \cdot \vec{n} \cdot dS = \iiint_{(\Gamma)} \text{div } \vec{V} \cdot \vec{n} \cdot d\Gamma \quad (\text{I.85})$$

Surface  $S$  fermée  
entourant  $V$

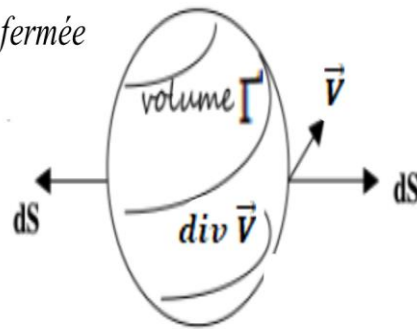


Figure I.9. Illustration du théorème d'Ostrogradski

### I.7. Définition et propriétés de la distribution Delta de Dirac :

#### I.7.1. Définition :

La distribution de Dirac est inventée par le physicien Paul Dirac. C'est une fonction  $\delta$  ou distribution généralisée et utilisée pour modéliser la charge ponctuelle idéalisée ou la densité d'une masse ponctuelle en fonction de zéro partout sauf pour zéro et dont l'intégrale sur toute la ligne réelle est égale à un.

C'est une fonction réelle, qui satisfait les propriétés suivantes :

- 1-  $\delta(t) = 0$  si  $t \neq 0$
- 2-  $\delta(t) = +\infty$  si  $t = 0$
- 3-  $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1$

Si l'intervalle contient 0, l'intégrale vaut 1, sinon elle vaut zéro :

$$\int_a^b \delta(t) dt = \begin{cases} 1, & 0 \in ]a, b[ \\ 0, & 0 \notin ]a, b[ \end{cases}$$

La figure **I.10**, représente la distribution  $\delta$  Delta de Dirac

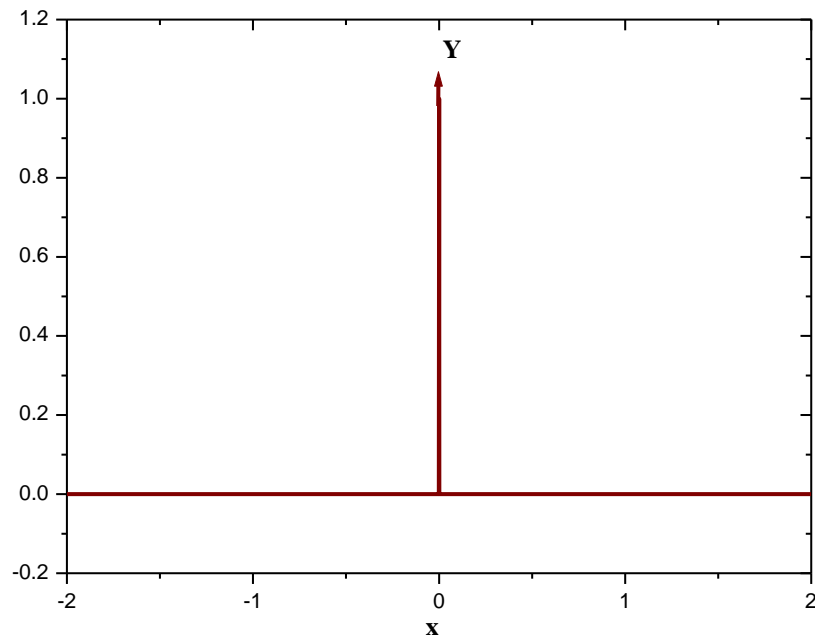


Figure **I.10**. Graphique du Delta de Dirac

### I.7.2. Propriétés :

Soit  $\alpha(x)$  une fonction continue au voisinage de  $x_0$ .

#### 1-Multiplication par une fonction :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x - x_0) \alpha(x) \rho(x) dx = \alpha(x_0) \rho(x_0) = \alpha(x_0) \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x - x_0) \rho(x) dx \quad (\text{I.86})$$

$$\text{D'où : } \alpha(x) \delta(x - x_0) = \alpha(x_0) \delta(x - x_0) \quad (\text{I.87})$$

#### 2-Homothétie :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\gamma x) \rho(x) dx = \int_{x=\frac{y}{\gamma}} \frac{1}{|\gamma|} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(y) \rho\left(\frac{y}{\gamma}\right) dy = \frac{1}{|\gamma|} \rho(0) = \frac{1}{|\gamma|} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) \rho(x) dx \quad (\text{I.88})$$

$$\delta(\gamma x) = \frac{1}{|\gamma|} \delta(x) \quad (\text{I.89})$$

D'où:  $\delta(-x) = \delta(x)$  la distribution de dirac est paire.

#### 3-Dérivées de $\delta(x)$ :

$$\text{Définition: } \int_{-\infty}^{+\infty} \delta'(x) \rho(x) dx = [\delta(x) \rho(x)]_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) \rho'(x) dx = -\rho'(0) \quad (\text{I.90})$$

Par récurrence:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta^{(n)}(x - x_0) \rho(x) dx = (-1)^n \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x - x_0) \rho^{(n)}(x) dx = (-1)^n \rho^{(n)}(x_0) \quad (\text{I.91})$$

Conséquence :  $\alpha(x) \delta'(x - x_0) = \alpha(x_0) \delta'(x - x_0) - \alpha'(x_0) \delta(x - x_0)$  (I.92)

Démonstration :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta'(x - x_0) \alpha(x) \rho(x) dx = -[\alpha(x) \rho(x)]'_{x=x_0} = -\alpha(x_0) \rho'(x_0) - \alpha'(x_0) \rho(x_0) \quad (\text{I.93})$$

$$= -\alpha(x_0) \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x - x_0) \rho'(x) dx - \alpha'(x_0) \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x - x_0) \rho(x) dx \quad (\text{I.94})$$

$$= \alpha(x_0) \int_{-\infty}^{+\infty} \delta'(x - x_0) \rho(x) dx - \alpha'(x_0) \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x - x_0) \rho(x) dx \quad (\text{I.95})$$

**4-Distribution de Dirac d'une fonction dérivable n'ayant que des zéros simple:**

$f(x)$  une fonction dérivable ne possédant que des zéros simples  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ .

Supposons  $f$  croissante sur  $[a, b]$  (et resp. décroissante) au voisinage de  $x_n$

Alors:

$$V[f(x)] = \begin{cases} 0 & \text{si } a \leq x < x_n \\ 1 & \text{si } x_n < x \leq b \end{cases} \quad \text{et resp} \quad \begin{cases} 1 & \text{si } a \leq x < x_n \\ 0 & \text{si } x_n < x \leq b \end{cases} \quad (\text{I.96})$$

D'où sur  $[a, b]$  :

$$\delta[f(x)] = \frac{dV[f(x)]}{df(x)} = \frac{dV[f(x)]}{dx} \frac{dx}{df(x)} = \frac{1}{f'(x)} \frac{dV[f(x)]}{dx} \quad (\text{I.97})$$

$$= \frac{1}{f'(x)} \frac{dV[x-x_n]}{dx} = \frac{1}{f'(x)} \delta(x - x_n) \quad (\text{rep. } \frac{1}{f'(x)} \frac{dV[x_n-x]}{dx} = \frac{1}{f'(x)} [-\delta(x - x_n)]) \quad (\text{I.98})$$

Alors dans les deux cas  $\delta[f(x)] = \sum_n \frac{1}{|f'(x_n)|} \delta(x - x_n)$  (I.99)

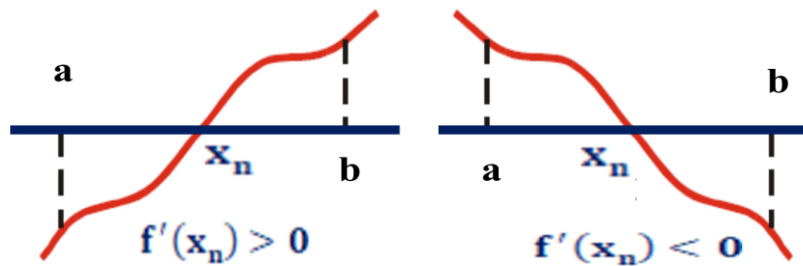
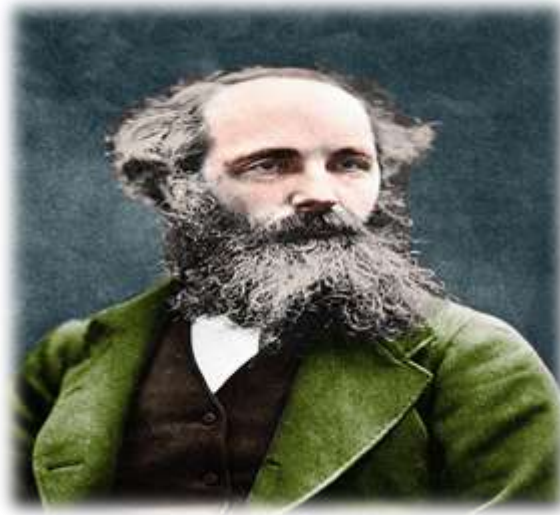


Figure I.11. Distribution de Dirac d'une fonction dérivable

## CHAPITRE II

### Équations de Maxwell



*James Clerk Maxwell*

(13 juin 1831 à Édimbourg en Écosse 5 novembre 1879 à Cambridge en Angleterre) est un physicien et mathématicien écossais. Il est principalement connu pour avoir unifié en un seul ensemble d'équations, les équations de Maxwell, l'électricité, le magnétisme et l'induction, en incluant une importante modification du théorème d'Ampère. Ce fut à l'époque le modèle le plus unifié de l'électromagnétisme. Il est également célèbre pour avoir interprété, dans un article scientifique, la lumière comme étant un phénomène électromagnétique en s'appuyant sur les travaux de Michael Faraday. Il a notamment démontré que les champs électriques et magnétiques se propagent dans l'espace sous la forme d'une onde et à la vitesse de la lumière.

Ces deux découvertes permirent d'importants travaux ultérieurs notamment en relativité restreinte et en mécanique quantique.

Il a également développé la distribution de Maxwell, une méthode statistique de description de la théorie cinétique des gaz.

Maxwell est considéré par de nombreux physiciens comme le scientifique du XIX<sup>e</sup> siècle ayant eu le plus d'influence au XX<sup>e</sup> siècle. Ses contributions à la science sont considérées par certains comme aussi importantes que celles d'Isaac Newton ou d'Albert Einstein. En 1931, pour le centenaire de la naissance de Maxwell, Einstein décrivait les travaux de Maxwell comme les «plus profonds et fructueux que la physique ait connus depuis le temps de Newton».

Il est également connu pour avoir réalisé le 17 mai 1861 la première photographie en vraie couleur devant les membres de la Royal Institution de Londres

## Partie 1: L'électrostatique, l'électrocinétique et la magnéto­statique

### II.1.A-Rappels et compléments sur l'électrostatique:

#### II.1.A-1.Définition :

L'électrostatique est la branche de la physique qui étudie les phénomènes produits par des charges électriques à l'état de repos. (Comme le potentiel électrostatique et le champ) Les forces qu'elles exercent entre ces charges, c'est-à-dire de leurs interactions sont décrites par la loi de **Coulomb** (1736-1806), cette loi offre une certaine analogie avec l'interaction gravitationnelle.

#### II.1.A.2. La loi de Coulomb ou principe fondamental de l'électrostatique :

Considérons dans le vide,  $q_1$  et  $q_2$  deux particules chargées, fixées en A et B. Les deux charges stationnaires  $q_1$  et  $q_2$  exercent l'une sur l'autre une force appelée force d'interaction électrique.

La force  $\vec{F}_{1\rightarrow 2}$  exercée par  $q_1$  sur la charge  $q_2$  s'écrit:

$$\vec{F}_{1\rightarrow 2} = \frac{q_1 q_2}{4\pi \epsilon_0 r^2} \vec{u}_{1\rightarrow 2} \quad (\text{II.1})$$

Conformément au principe de l'action et de la réaction, la force  $\vec{F}_{2\rightarrow 1}$  exercée par  $q_2$  sur la charge  $q_1$  est égale et opposée à  $\vec{F}_{1\rightarrow 2}$ :  $\vec{F}_{1\rightarrow 2} = -\vec{F}_{2\rightarrow 1}$

Où :  $\vec{u}_{12}$  représente le vecteur unitaire pointe de la charge  $q_1$  vers  $q_2$  et défini par:

$$\vec{u}_{1\rightarrow 2} = \frac{\overline{AB}}{\|\overline{AB}\|} = \frac{\overline{AB}}{r} \quad (\text{II.2})$$

$r$  est la distance séparant les deux charges

$\epsilon_0$  est la permittivité diélectrique du vide et a pour valeur:

$$\epsilon_0 = \frac{1}{36\pi \times 10^{-9}} = 8.854187817 \times 10^{-12} \text{ Fm}^{-1}$$

#### Remarque

La force électrostatique entre les deux charges  $q_1$  et  $q_2$  est dirigée suivant la droite qui joint les deux charges (voir figure **I.1**). Elle est attractive si les charges sont de signes contraires (figure **II.1.a**), répulsive lorsque les charges sont de même signe (figure **II.1.b**)

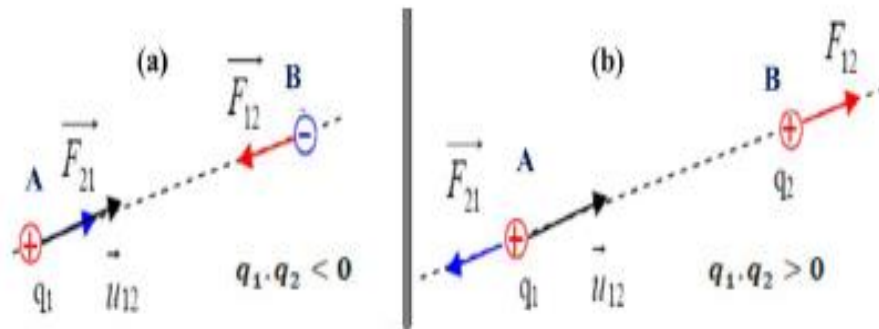


Figure II.1 Loi de coulomb

### II.1.A. 3. Le champ électrique :

L'existence de la charge  $q_2$  dans une région de l'espace modifie les propriétés de cette région, en créant un champ électrique noté  $\vec{E}_{q_2}$  qui se manifeste par la force exercée sur la charge  $q_1$ . Cette force est donnée par la relation suivante:  $\vec{F}_{q_2 \rightarrow q_1} = q_1 \vec{E}_{q_2}$  (II.3)

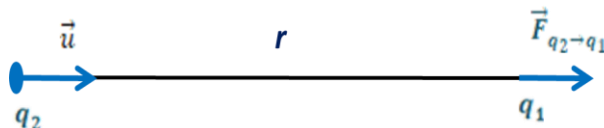


Figure II.2. Champ électrostatique créé par une charge ponctuelle

Et d'après la loi de Coulomb, le champ électrique créé par la charge  $q_2$ , dans une direction donnée par le vecteur unitaire  $\vec{u}$  et à une distance  $r$ , est alors défini par :

$$\vec{E}_{q_2} = \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u} \quad (\text{II.4})$$

#### Remarque :

Dans le cas des phénomènes indépendants du temps ou stationnaires, le champ électrique est appelé champ électrostatique.

### II.1.A.4 Principe de superposition :

Si plusieurs charges ponctuelles  $q, q_1, q_2, q_3, q_4, \dots, q_n$  sont situées en des points  $A, A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$

La présence de ces charges  $q_i$  crée un champ électrique résultant égal à la somme vectorielle des champs électriques créés individuellement par chacune de ces charges :

$$\vec{E} = \sum_i \vec{E}_{q_i} = \sum_i \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r}_i}{r_i^3} \quad (\text{II.5})$$

avec  $i = 1, 2, 3, \dots, n$

#### Remarque :

Le Principe de superposition n'est valable que dans le seul cas de charges au repos.

La figure II.3. montre un exemple de principe de superposition des champs.

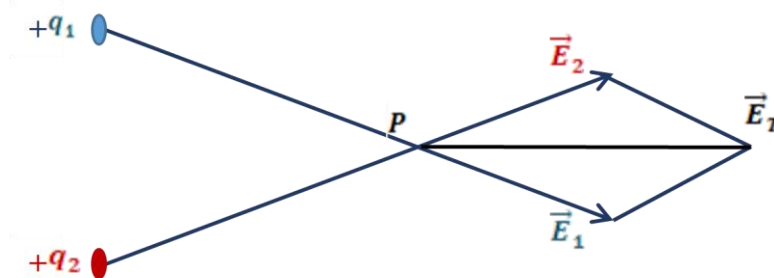


Figure II.3. principe de superposition des champs

On peut définir en P le champ électrostatique  $\vec{E}_T$  créé par les deux charges  $q_1$  et  $q_2$  d'après la relation

$$\vec{E}_T = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 \quad (\text{II.6})$$

### II.1.A.5. Distribution continue de charges – densité:

La matière se présente, en dernière analyse, sous la forme d'un très grand nombre de particules élémentaires chargées de masses (les protons et les électrons) et de charges extrêmement faibles à l'échelle macroscopique. Ceci nous permet de considérer, dans de nombreux cas, que la répartition des charges dans la matière est continue:



### II.1.A.5.1 Champ électrique créé par une distribution linéique de charges électriques:

Pour un système filiforme, on introduira une densité linéaire de charge  $\lambda$  telle que:

$$dq = \lambda(P) dl_p \quad (\text{II.7})$$

Le champ électrique créé par une distribution linéique de charge de longueur  $l$  est donné par :

$$\vec{E}(M) = \int_{(l)} \frac{1}{4 \pi \epsilon_0} \lambda(P) \frac{\vec{r}}{r^3} dl_p \quad (\text{II.8})$$

Avec  $r^3 = \|\overrightarrow{PM}\|^3$  et  $\vec{r} = \overrightarrow{PM}$

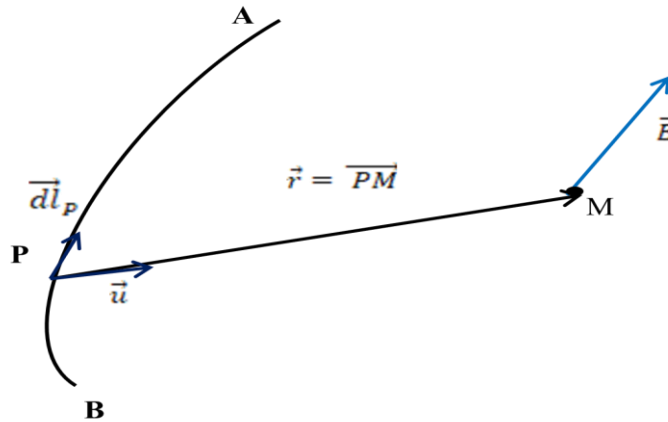


Figure II.4. Champ électrique créé par une distribution linéique de charges électriques

### II.1.A.5.2 Champ électrique créé par une distribution surfacique de charges électriques :

Si les charges sont réparties sur une couche d'épaisseur très faible par rapport aux dimensions de la couche, on définit une densité surfacique locale de charge électrique  $\sigma(P)$ , à partir de la charge  $dq$  portée par un élément  $dS_p$ , de la surface de la couche, entourant le point P :

$$dq = \sigma(P) dS_p \quad (\text{II.9})$$

Le champ électrique créé par une telle distribution sur une surface  $S$  sera :

$$\vec{E}(M) = \iint_{(S)} \frac{1}{4 \pi \epsilon_0} \sigma(P) \frac{\vec{r}}{r^3} dS_p \quad (\text{II.10})$$

$$\text{Ou bien : } \vec{E}(M) = \frac{1}{4 \pi \epsilon_0} \iint_{(S)} \sigma(P) \frac{\vec{r}}{r^3} dS_p \quad (\text{II.11})$$

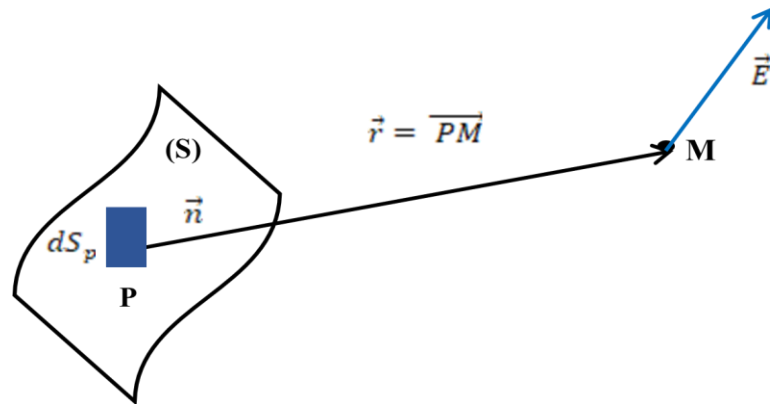


Figure II.5. Champ électrique créé par une distribution surfacique de charges électriques

### II.1.A.5.3 Champ électrique créé par une distribution volumique de charges électriques:

Pour calculer le champ dû à une distribution en volume, on considère de petits éléments de la distribution volumique de charges de volume  $d\tau_p$ , situés aux points  $P$  et portant chacun une charge :

$$dq = \rho(P) d\tau_p \quad (\text{II.12})$$

Où  $\rho$  est la densité volumique de charge électrique

Le champ dû à l'ensemble du volume chargé  $V$  sera alors :

$$\vec{E}(M) = \iiint_{(\tau)} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \rho(P) \frac{\vec{r}}{r^3} d\tau_p \quad (\text{II.13})$$

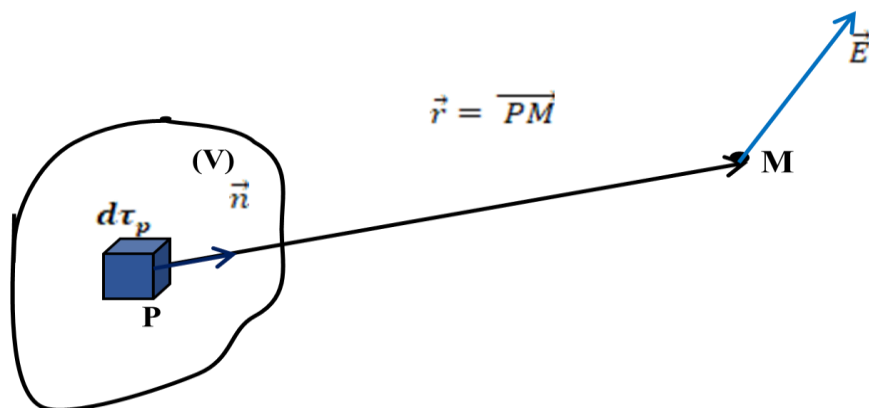


Figure II.6. Champ électrique créé par une distribution volumique de charges électriques.

### II.1.A.6. Propriétés du champ électrostatique:

#### II.1.A.6.1 Le potentiel électrostatique:

Du fait de la nature scalaire du potentiel et des propriétés additives du produit scalaire de deux vecteurs, le potentiel créé par une distribution de charges est la somme algébrique des potentiels créés par les charges individuelles.

On a vu que le Champ électrique créé par une distribution surfacique de charges électriques est donné par cette équation :

$$\vec{E}(M) = \iint_{(S)} \frac{\sigma(P) \vec{r}}{4 \pi \epsilon_0 r^3} dS_p \quad (\text{II.14})$$

Calculons le rotationnel du champ électrique  $\vec{E}(M)$  donné par la précédente équation

$$\vec{\nabla} \times \vec{E}(M) = \vec{\nabla} \times \iint_{(S)} \frac{\sigma(P) \vec{r}}{4 \pi \epsilon_0 r^3} dS_p \quad (\text{II.15})$$

L'opérateur  $\vec{\nabla} \times$  peut être introduit dans l'intégrale et on trouve alors :

$$\vec{\nabla} \times \vec{E}(M) = \iint_{(S)} \vec{\nabla} \times \left[ \frac{\sigma(P) \vec{r}}{4 \pi \epsilon_0 r^3} dS_p \right] \quad (\text{II.16})$$

Lorsque les éléments  $dS_p$  et  $\sigma(P)$  ne dépendent que de  $P$ , il s'ensuit que l'équation précédente peut s'écrire :

$$\vec{\nabla} \times \vec{E}(M) = \iint_{(S)} \frac{\sigma(P)}{4 \pi \epsilon_0} \vec{\nabla} \times \left[ \frac{\vec{r}}{r^3} \right] dS_p \quad (\text{II.17})$$

$$\text{Et : } \vec{\nabla} \times \left[ \frac{\vec{r}}{r^3} \right] = \vec{0} \quad (\text{II.18})$$

$$\text{Il s'ensuit le résultat fondamental : } \vec{\nabla} \times \vec{E} = \vec{0} \quad (\text{II.19})$$

Sachant que le rotationnel d'un gradient est nul, il existe un champ scalaire appelé potentiel électrostatique  $V$  tel que:  $\vec{E} = -\vec{\nabla} V$  (II.20)

$$\text{A partir du résultat précédent on peut t montrer que : } dV = -\vec{E} \cdot d\vec{l} \quad (\text{II.21})$$

En électrostatique, la circulation du champ électrique le long de toute courbe fermé est nulle (circulation conservative), c'est-à-dire qu'il satisfait la relation intégrale suivante:  $\oint_{(l)} \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$  (II.22)

Ce résultat est toujours vérifié, chaque fois que le champ électrostatique  $\vec{E}$  dérive d'un potentiel.

Le principe de superposition peut être généralisé au calcul du potentiel électrostatique :

1)-Le potentiel électrostatique créé par une charge ponctuelle est:

$$V(\vec{r}) = \frac{q}{4 \pi \epsilon_0 r} \quad (\text{II.23})$$

2)–Potentiel électrostatique créé par une distribution discrète de charges(plusieurs charges)

$$V(M) = \sum_i V_{qi} = \frac{1}{4 \pi \epsilon_0} \sum_i \frac{q_i}{r_i} \quad (\text{II.24})$$

3)–Potentiel électrostatique créé par une distribution linéique de charges de densité  $\lambda$  sur un longueur ( $l$ ) :

$$V(M) = \frac{1}{4 \pi \epsilon_0} \int_{(l)} \frac{\lambda(P)}{r} dl_p \quad (\text{II.25})$$

4)–Potentiel électrostatique créé par une distribution surfacique de charges de densité  $\sigma$  sur une surface ( $S$ ) :

$$V(M) = \frac{1}{4 \pi \epsilon_0} \iint_{(S)} \frac{\sigma(P)}{r} dS_p \quad (\text{II.26})$$

5)–Potentiel électrostatique créé par une distribution volumique de charges de densité  $\rho$  répartie dans un volume ( $\tau$ ) :

$$V(M) = \frac{1}{4 \pi \epsilon_0} \iiint_{(\tau)} \frac{\rho(P)}{r} d\tau_p \quad (\text{II.27})$$

On écrira donc,dans le cas le plus général :

$$V(M) = \frac{1}{4 \pi \epsilon_0 r_i} \sum_i \frac{q_i}{r_i} + \frac{1}{4 \pi \epsilon_0} \int_{(l)} \frac{\lambda(P)}{r} dl_p + \frac{1}{4 \pi \epsilon_0} \iint_{(S)} \frac{\sigma(P)}{r} dS_p + \frac{1}{4 \pi \epsilon_0} \iiint_{(\tau)} \frac{\rho(P)}{r} d\tau_p \quad (\text{II.28})$$

### II.1.A.6.2. Topographie d'un champ électrique :

#### 1- Lignes de champ :

##### a-Définition :

On appelle ligne de champ de vecteur quelconque (parfois appelées lignes de force) toute courbe C définie dans l'espace telle que, en chacun de ses points le vecteur y soit tangent.

Soit A un point d'une ligne de champ et  $\vec{dl}$  le vecteur déplacement élémentaire sur une ligne de champ (Voir figure II.7).

Le fait que le champ  $\vec{E}$  soit en tout point de C parallèle à  $\vec{dl}$  s'écrit:  $\vec{E} \wedge \vec{dl} = \vec{0}$  (II.29)

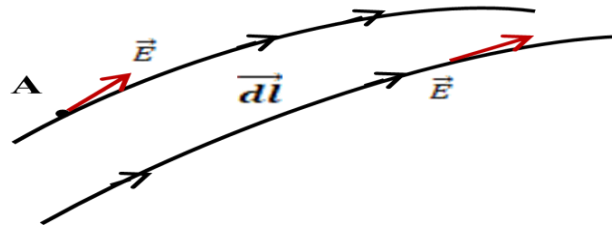


Figure II.7. Lignes de champ

**b-Exemple de lignes de champ :**

Premier exemple : Lignes de champ générées par une seule charge ponctuelle:

Dans le cas d'une charge ponctuelle, les lignes du champ créées par cette charge sont des demi-droites qui se coupent au point où se trouve la charge.

**Remarque :** Les lignes de champ s'éloignent des sources chargées positivement  $q > 0$  (figure II.8.a) et se dirigent vers les sources chargées négativement  $q < 0$  (figure II.8.b).



Figure II.8. Lignes de champ pour les deux types de charges séparées.

Deuxième exemple: Lignes de champ générées par deux charges ponctuelles voisines égales mais de signes contraires :

Les lignes de champ autour de deux charges ponctuelles voisines égales mais de signes contraires sont présentées dans la figure II.9

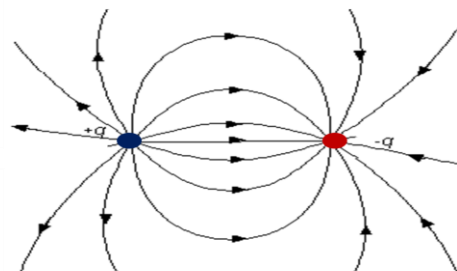


Figure II.9. Lignes de champ de deux charges égales et de signes contraires

*Troisième exemple:* Lignes de champ générées par deux charges ponctuelles voisines égales portant la même charge

La figure II.10 représente les lignes de champ autour de deux charges ponctuelles voisines égales portant la même charge.

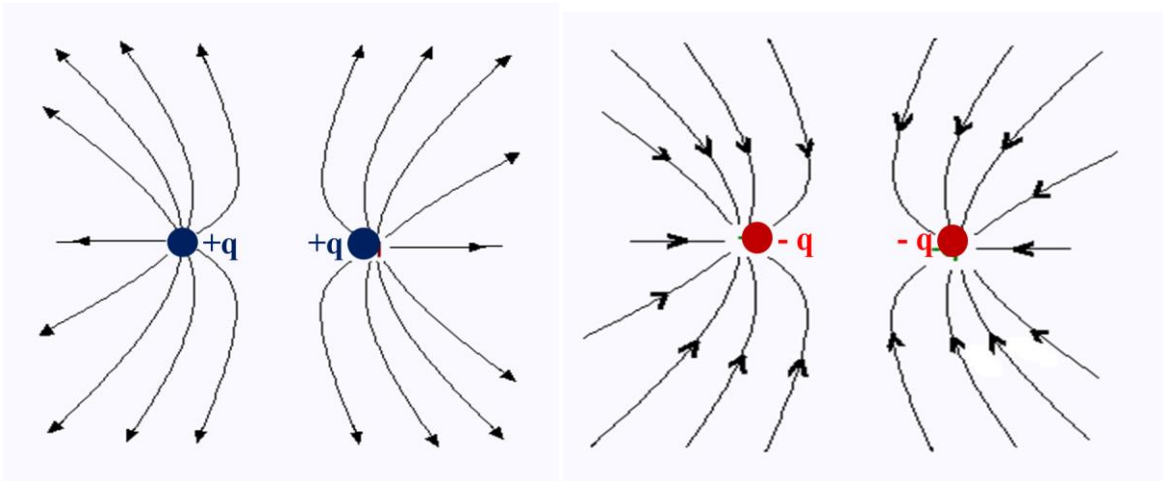


Figure II.10. Lignes de champ de deux charges égales

*Quatrième exemple:* Lignes de champ générées par deux charges ponctuelles voisines, portant des signes non égaux mais opposés

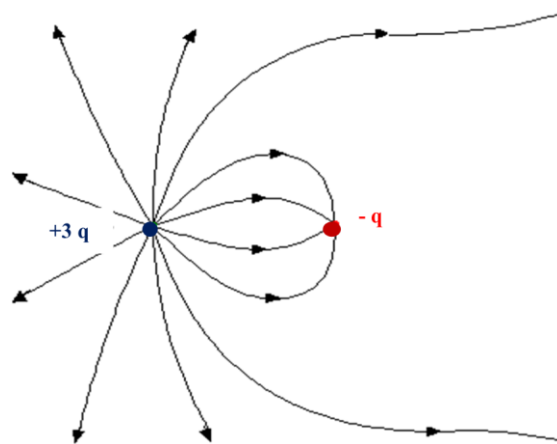


Figure II.11. Lignes de champ générées par deux charges ponctuelles voisines, portant des signes non égaux mais opposés

Cinquième exemple: Lignes de champ d'un champ électrique uniforme

Les lignes d'un champ uniforme sont présentées dans la figure **II-12**

Un composant électrique constitué de deux plaques métalliques, séparées par un isolants (air, vide...) parallèles, rapprochées, L'une des plaques du condensateur porte une charge négative  $-q$  tandis que l'autre porte une charge positive  $+q$ .

On observe un champ électrique quasiment uniforme à l'intérieur du condensateur, il leur est perpendiculaire et orienté de celle qui est chargée positivement vers celle qui est négative.

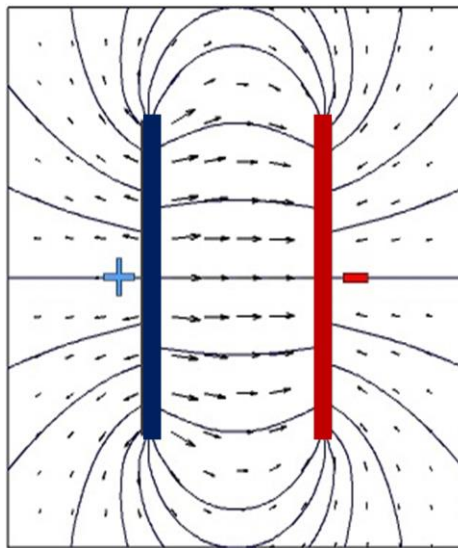


Figure **II.12**. Lignes de champ d'un champ électrique uniforme.

## 2- Tube de champ :

On peut, en générale, tracer des courbes telles qu'en chacun de leurs points, le vecteur  $\vec{E}$  soit porté par la tangente à ces courbes: ce sont les lignes de champ ( parfois appelées lignes de force). Un tube de champ ( ou tube de force) sera la surface formée par l'ensemble des lignes de champ s'appuyant sur un contour fermé .

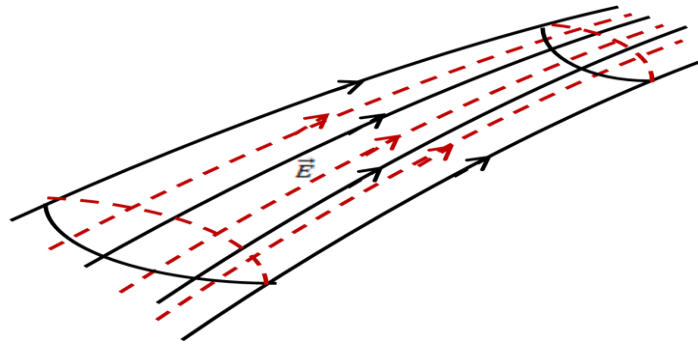


Figure II-13 Tube de champ

### 3- Surfaces équipotentielles :

On appelle «surfaces Equipotentielles» la région où la valeur du potentiel électrique est la même en tout point, c'est-à-dire sont des surfaces d'équation  $V = \text{cste}$ .

Comme  $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}V$ , donc le champ électrostatique  $\vec{E}$  est normal aux surfaces équipotentielles et dirigé vers les potentiels décroissants

Les surfaces équipotentielles de centre O et les lignes du champ  $\vec{E}$  créés par une charge ponctuelle positive située en un point O sont présentées dans la figure II-14.

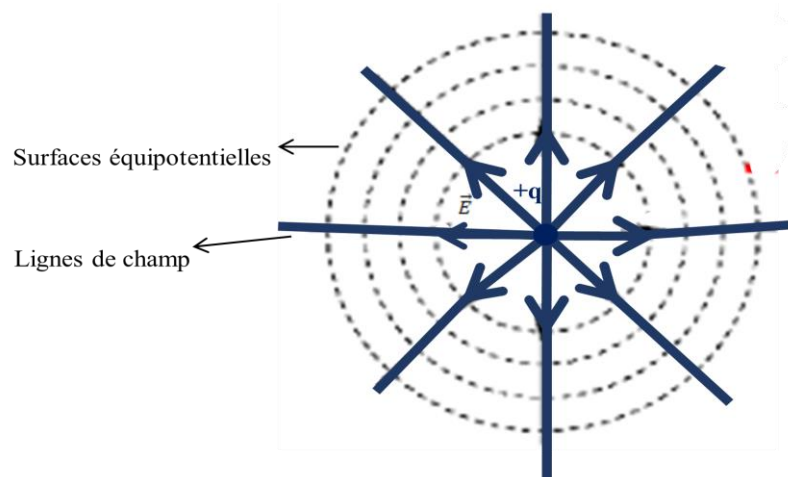


Figure II- 14. Surfaces équipotentielles



### II.1.A.6.3 Le Théorème de Gauss:

Le Théorème de Gauss et appelé aussi la Première loi de l'électrostatique, ce théorème fournit le lien entre le flux électrique à travers une surface fermée et le nombre de charges présentés à l'intérieur du volume entouré par cette surface.

Le théorème de gauss lui aussi dérive de la loi de coulomb, rappelons que « **le flux  $\phi$  d'un champ électrique à travers une surface fermé est égale à la somme algébrique des charges se trouvant à l'intérieur du volume limité par cette surface, divisé par la permittivité  $\epsilon_0$**  » .

Nous pouvons alors écrire :

$$\phi = \oint_{(S)} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_i Q_i = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint_{\tau} \rho d\tau \quad (\text{II.30})$$

On peut utiliser le théorème d'Ostrogradski «le Théorème de la divergence» pour exprimer le Théorème de Gauss. On a pour le flux  $\phi$  sortant à travers une surface fermée S, du champ électrique  $\vec{E}$  :

$$\phi = \iiint_{\tau} \text{div} \vec{E} \cdot d\tau \quad (\text{II.31})$$

Ou  $\tau$  est le volume délimité par la surface (S).

D'autre part (Théorème de Gauss)/

$$\phi = \iiint_{\tau} \frac{1}{\epsilon_0} \rho d\tau \quad (\text{II.32})$$

$$\text{A partir des deux équations précédentes on peut établir que: } \text{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (\text{II.33})$$

En tenant compte du fait que le potentiel électrostatique V est relié au champ électrostatique  $\vec{E}$  par:  $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} V$ .

$$\text{Donc } \text{div} \vec{E} = -\text{div} (\overrightarrow{\text{grad}} V) \quad (\text{II.34})$$

D'après le chapitre (I) et par définition, le laplacien scalaire de la fonction scalaire V(x,y,z) est la quantité scalaire  $\Delta V = (\text{div} \overrightarrow{\text{grad}} V)$  ; on aboutit à **l'équation de poisson** :  $\Delta V + \frac{\rho}{\epsilon_0} = 0$  (II.35)

En absence de charges électriques (ou dans le cas d'un flux conservatif), on a  $\rho = 0$  , la divergence est nulle  $\text{div} \vec{E} = 0$  et aussi le laplacien du potentiel est nul.  $\Delta V = 0$ . Cette dernière relation porte le nom « **Équation de Laplace** ».

### II.1.A.6.4. Application du théorème de Gauss :

#### a- Cas d'une charge ponctuelle :

Considérons une charge ponctuelle positive  $q > 0$ , située en un point O (voir la figure II.15) et cherchons à calculer le champ en point P, à partir du théorème de Gauss.

soit une sphère (S), de centre O et de rayon  $r = OA$

La charge  $q$  crée en A un champ  $\vec{E}$  qui par raison de symétrie a même module en tout point de la sphère et est en outre normal à cette sphère.

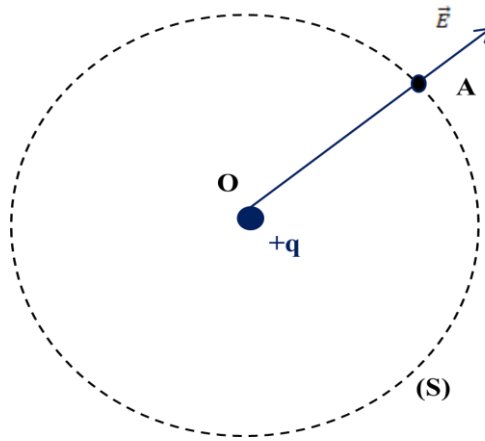


Figure II.15. Champ créé par une charge ponctuelle.

A partir du théorème de Gauss le flux de  $\vec{E}$  à travers (S) vaut  $\sum \frac{Q_i}{\epsilon_0}$  soit ici  $\frac{q}{\epsilon_0}$ .

Evaluons directement  $\phi(\vec{E})$  :

$$\phi(\vec{E}) = \iint_{(S)} \vec{E} \cdot \vec{dS} \quad (\text{II.36})$$

$\vec{E}$  et  $\vec{dS}$  étant parallèles

$$\iint_{(S)} \vec{E} \cdot \vec{dS} = \iint_{(S)} E \cdot dS \quad (\text{II.37})$$

$\vec{E}$  ayant même module en tout point de (S),

$$\text{Alors : } \iint_{(S)} E \cdot dS = E \iint dS = E \cdot 4\pi r^2 \quad (\text{II.38})$$

$$\text{D'où } \phi = E \cdot 4\pi r^2 = \frac{q}{\epsilon_0}. \text{ En égalant les deux valeurs on obtient : } E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{r^2} \quad (\text{II.39})$$

**b- Cas d'une distribution sphérique en volume :**

Soit (S) la sphère centrée en O et de rayon R, portant une densité volumique de charge uniformément répartie à l'intérieur de cette sphère

$\rho = \frac{dq}{dV}$  est la densité volumique.

$Q = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho$  est la charge totale de la sphère O

La surface de gauss ( $S_G$ ) qui convient ici est une sphère de rayon r et de centre O .

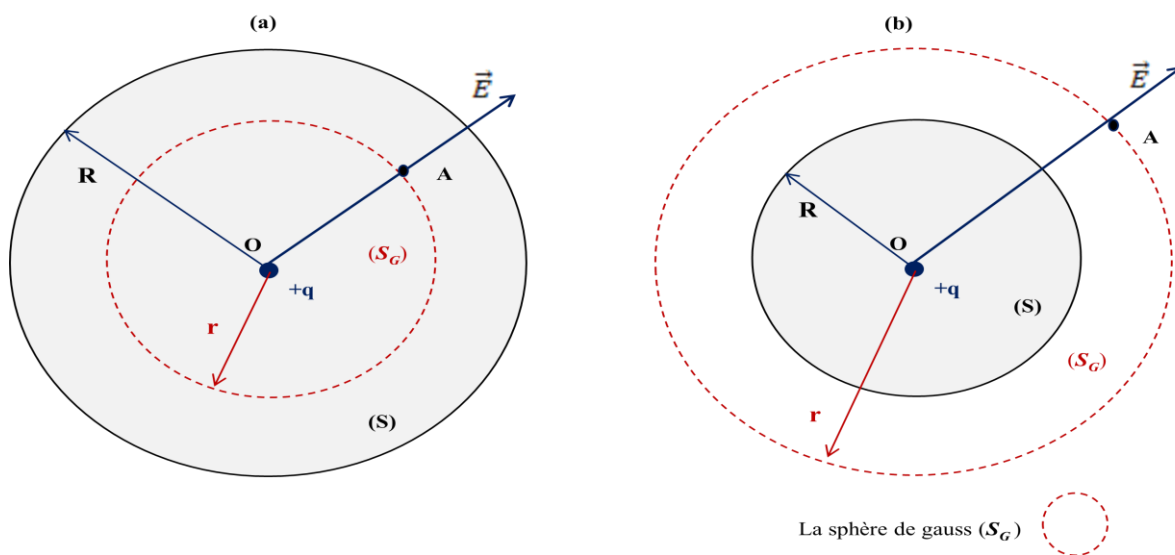


Figure II.16. Champ créé par une distribution sphérique en volume

**a):**  $R > r$  (la figure II.16.a)

La sphère de gauss ( $S_G$ ) enclose une charge:  $q = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho$  (II.40)

D'après le théorème de gauss:  $\Phi = \frac{q}{\epsilon_0} = \frac{4\pi r^3 \rho}{3\epsilon_0}$  (II.41)

Et par ailleurs:  $\Phi = \iint_{(S_G)} \vec{E} \cdot d\vec{S} = E \cdot 4\pi r^2$  (II.42)

Donc le champ électrique en un point (A) situé à l'intérieur de la sphère vaudra :  $E = \frac{\rho}{3\epsilon_0} r$  (II.43)

**b) :**  $R < r$  (la figure II.16.b)

La sphère de gauss enclose une charge totale :  $Q = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho$  (II.44)

Le flux du vecteur champ à travers la surface de Gauss ( $S_G$ ) a pour valeur  $\phi = E \cdot 4\pi r^2$

Et d'après le théorème de Gauss:  $\phi = \frac{4\pi R^3 \rho}{3\epsilon_0}$  (II.45)

Donc le champ électrique en un point ( $A'$ ) situé à l'extérieur de la sphère vaudra :

$$E = \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0} \frac{1}{r^2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2}$$
 (II.46)

**Etude de la variation du champ créé par une distribution sphérique en volume:**

Nous avons présenté dans la figure II-17 la variation du champ électrique en fonction de la distance  $r$  du centre  $O$  de la sphère.

- Dans la première région  $0 < r < R$  nous avons trouvé  $E = \frac{\rho}{3\epsilon_0} r$  on remarque que le champ varie linéairement en fonction de  $r$

- Dans la deuxième région  $R < r$  nous avons trouvé  $\frac{\rho R^3}{3\epsilon_0} \frac{1}{r^2}$

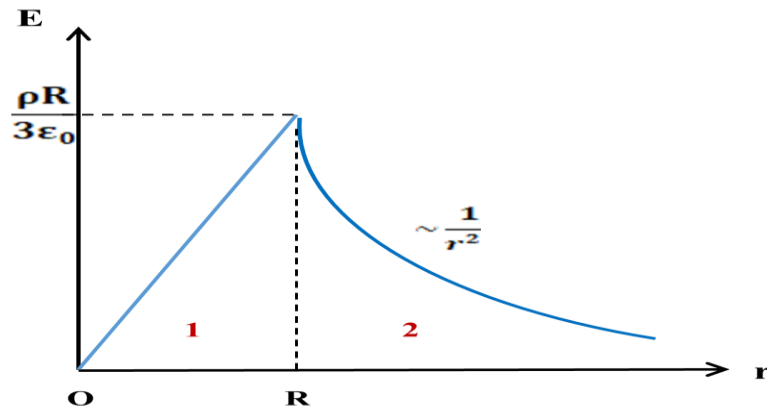


Figure II.17. Variation du champ créée par une distribution sphérique en volume

**Potentiel:**

A l'aide de l'équation  $\vec{E} = -\overrightarrow{grad} V$ , qui du fait de la symétrie radiale du problème s'écrit  $E = -\frac{dV}{dr}$  et par intégration, on trouve:

-Le premier cas :  $R > r$   $V = -\frac{\rho}{6\epsilon_0} r^2 + \frac{\rho R^2}{2\epsilon_0}$  (II.47)

-Le deuxième cas :  $R < r$   $V = \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0} \frac{1}{r}$  (II.48)

Les constantes étant choisies pour assurer la continuité de  $V(r)$  et son annulation à l'infini.

Dans la figure II.18 nous avons présenté la variation du potentiel en fonction de  $r$

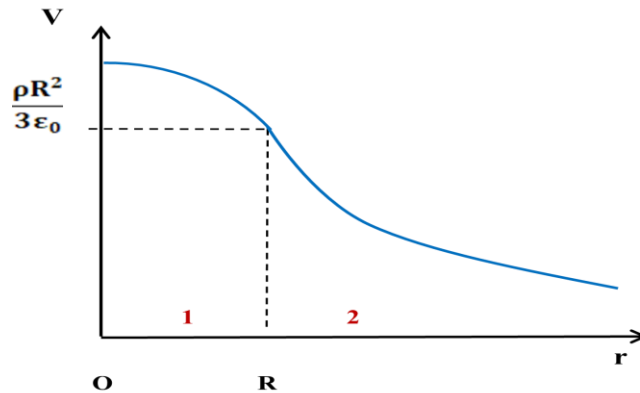


Figure II.18 Variation du potentiel en fonction de  $r$

**c- Cas d'une distribution sphérique en surface :**

Soit  $(S)$  la sphère centrée en  $O$  et de rayon  $R$ , portant une densité surfacique de charge  $\sigma = \frac{dq}{dS}$

Avec  $q = 4\pi R^2 \sigma$  est la charge totale de la sphère  $O$ .

La surface de Gauss  $(S_G)$  qui convient ici est une sphère de rayon  $r$  et de centre  $O$  (voir la figure II.19)

**a):**  $R > r$  (la figure II.19.a)

champ en un point  $A$  intérieur à la sphère  $(S)$ , utilisons le théorème de Gauss à la sphère  $(S_G)$  de centre  $O$  et de rayon  $r=OA$  ; celle-ci ne contient pas de charges :

On a :  $\phi = \iint_{(S_G)} \vec{E} \cdot d\vec{S} = 0$  (II.49)

Donc :  $E = 0$

**b) :**  $R < r$  (la figure II.19.b) , champ en un point  $A$  extérieur à la sphère  $(S)$  :

-Flux du champ à travers la sphère  $(S_G)$  de centre  $O$  et de rayon  $r = OA$

D'après le théorème de gauss:  $\phi = \sum \frac{Q_i}{\epsilon_0} = \frac{4\pi R^2 \sigma}{\epsilon_0}$  (II.50)

Et par ailleurs:  $\phi = \iint_{(S_G)} \vec{E} \cdot \vec{dS}$  (II.51)

Nous avons remarqué que le champ est radial et qu'il a même module en tout point ( $S_G$ )

Alors :  $E \cdot 4\pi r^2 = \frac{4\pi R^2 \sigma}{\epsilon_0}$  (II.52)

$E = \frac{4\pi R^2 \sigma}{4\pi \epsilon_0} \cdot \frac{1}{r^2}$  (II.53)

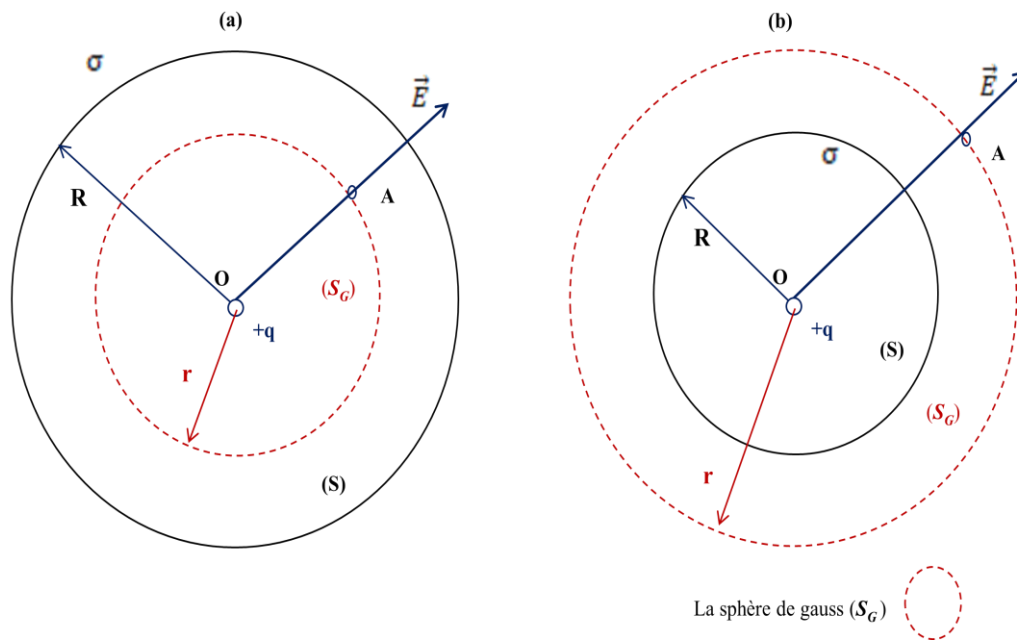


Figure II.19. Champ créé par une distribution de surface sur une sphère

**Potentiel:**

a):  $R > r$

On a :  $E = 0$  alors le champ est nul à l'intérieur de la sphère et par conséquent le potentiel est constant.

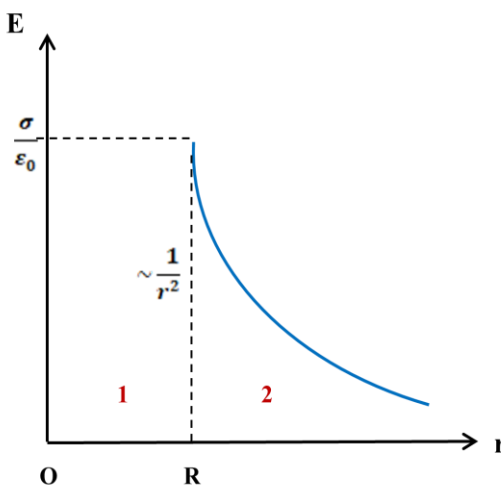
b) :  $R < r$

On a :  $E = \frac{4\pi R^2 \sigma}{4\pi \epsilon_0} \cdot \frac{1}{r^2}$  (II.54)

Donc le champ est de la forme  $E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{r^2}$  avec  $Q = 4\pi R^2 \sigma$ , il a même valeur que si la charge étant centrée en point O. ce résultat nous permet d'écrire directement l'expression du potentiel en point A :  $V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r}$  avec la convention  $V(\infty) = 0$

### Etude de la variation du champ et du potentiel crée par une distribution de surfaces sur une sphère:

Les figures II-20 et II.21 représentent les variations du champ électrique et du potentiel crée par une distribution de surfaces sur une sphère en fonction de la distance r



Figures II.20. Variation du champ électrique crée par une distribution de surfaces sur une sphère en fonction de la distance r

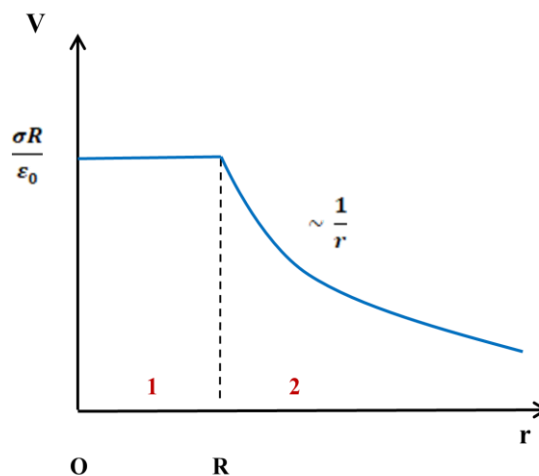


Figure II.21. Variation du potentiel crée par une distribution de surfaces sur une sphère en fonction de la distance r

On observe une discontinuité pour le champ et non pour le potentiel. Ce phénomène est général à traversé de toute surface chargée la composante normale du champ subit une discontinuité de valeur  $\frac{\sigma}{\epsilon_0}$

**d- Cas d'une distribution uniforme sur une droite:**

Pour calculer le champ  $\vec{E}$  crée par un fil en un point A de l'espace isotrope et homogène, très proche du fil, on peut considérer que le fil est infini.

Dans ce cas on considère un fil rectiligne indéfini  $zz'$  avec une densité linéaire de charge uniforme  $\lambda$ .

Les deux point A et A' sont symétriques par rapport à  $zz'$  sont équivalents, le champ y a donc le même module. Le champ doit être porté par  $AA'$  .

La surface de Gauss qui convient à ce cas est un cylindre de rayon  $r = OA$  et de révolutions d'axe  $zz'$ , passant par A, le limite par deux sections droites distances de  $l$ .

-Les bases du cylindre donnent une distribution nulle au calcul du flux de  $\vec{E}$  à travers la surface de Gauss ( $\vec{E} \cdot \vec{dS} = 0$ )

-Les parois latérales fournissent:

$$d\phi = \vec{E} \cdot \vec{dS} = E \cdot dS \quad (\text{le champ } \vec{E} \text{ est parallèle à } \vec{dS}) \quad (\text{II.55})$$

$$\text{Et par ailleurs: } \phi = \iint_{(S_G)} E \cdot dS = E \iint_{(S_G)} dS \quad (E \text{ étant constant sur les parois latérales}) \quad (\text{II.56})$$

$$\phi = E \cdot 2\pi r l \quad (\text{II.57})$$

$$\text{Sachant que: } \phi = \sum \frac{Q_i}{\epsilon_0} = \frac{\lambda l}{\epsilon_0} \quad (\text{II.58})$$

$$\text{Donc: } E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \quad (\text{II.59})$$



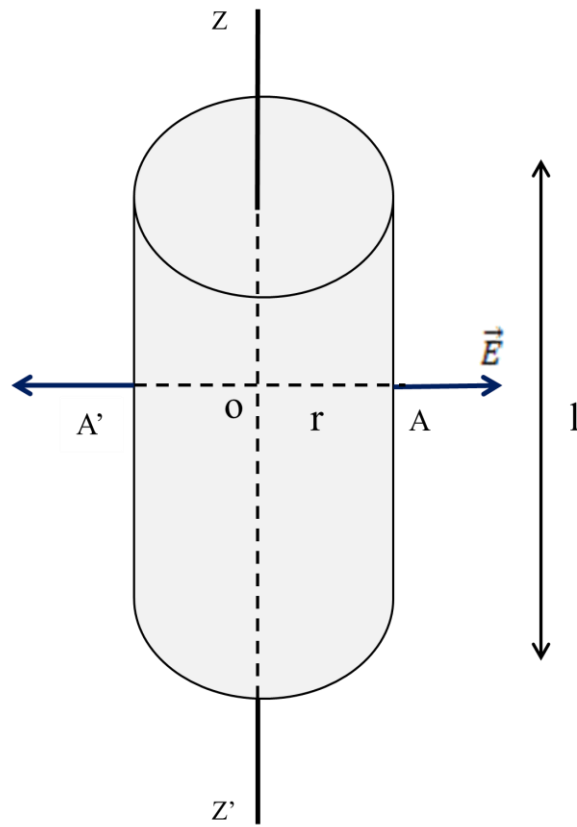


Figure II.22. Champ créé par une distribution linéaire.

II.1.A.6.5. En résumé :

Le tableau II.1 illustre les deux équations de champ et de potentiel dans le cas des distributions linéiques, surfaciques et volumiques :

	Distribution linéique	Distribution surfacique	Distribution volumique
<b>Densité</b>	$dq = \lambda(P) dl_p$	$dq = \sigma(P) dS_p$	$dq = \rho(P) d\tau_p$
<b>Champ électrique</b>	$\vec{E}(M) = \frac{1}{4 \pi \epsilon_0} \int_{(l)} \lambda(P) \frac{\vec{r}}{r^3} dl_p$	$\vec{E}(M) = \frac{1}{4 \pi \epsilon_0} \iint_{(S)} \sigma(P) \frac{\vec{r}}{r^3} dS_p$	$\vec{E}(M) = \frac{1}{4 \pi \epsilon_0} \iiint_{(\tau)} \rho(P) \frac{\vec{r}}{r^3} d\tau_p$
<b>Potentiel</b>	$V(M) = \frac{1}{4 \pi \epsilon_0} \int_{(l)} \frac{\lambda(P)}{r} dl_p$	$V(M) = \frac{1}{4 \pi \epsilon_0} \iint_{(S)} \frac{\sigma(P)}{r} dS_p$	$V(M) = \frac{1}{4 \pi \epsilon_0} \iiint_{(\tau)} \frac{\rho(P)}{r} d\tau_p$

Tableau II.1. Champ électrique et potentiel

Le tableau suivant illustre les deux équations fondamentales de l'électrostatique dans le vide:

	Théorème de gauss pour le champ $\vec{E}$	Le champ magnétique est à flux conservatif
<b>Forme locale</b>	$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$	$\vec{\nabla} \times \vec{E} = \vec{0}$
<b>Forme intégrale</b>	$\oiint_{(S)} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint_{\tau} \rho d\tau$	$\oint_{(l)} \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$

Tableau II.2. Deux équations fondamentales de l'électrostatique dans le vide

## II.1.B- Rappels et compléments sur l'électrocinétique

### II-1.B.1.Définition :

L'électrocinétique est la branche de l'électromagnétisme qui étudie les courants électriques c'est-à-dire l'étude du déplacement des charges électriques dans les circuits conducteurs fonctionnant en régime permanent. Cette branche étudie le mouvement d'ensemble des porteurs de charges dans un circuit électrique assez simple composé de sources, condensateur, résistance...etc.

En présence d'un champ électrique  $E$ , les charges électriques sont soumises à des forces électriques données par :  $\vec{F} = q \cdot \vec{E}$

### II.1.B.2.Vecteur densité de courant et l'intensité de courant:

Le courant électrique est défini par le déplacement collectif des porteurs de charges dans une vitesse organisée (voir figure II.23).

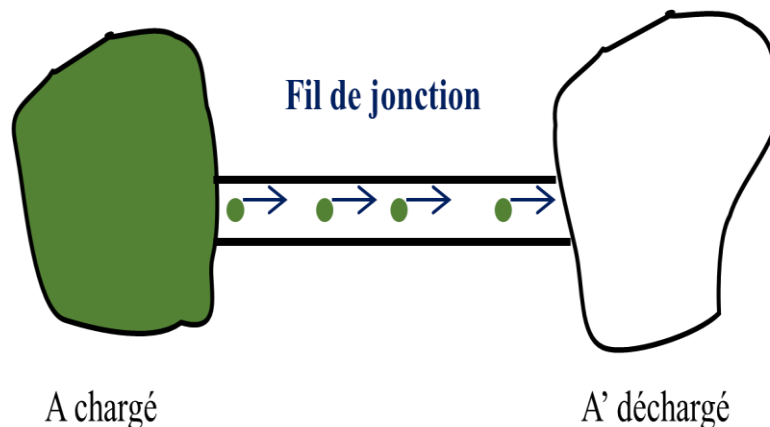


Figure II.23 Circulation du courant de A vers A'

La figure précédente représente deux corps, A chargé et A' non chargé et en état d'équilibre, relient les par un fil conducteur. le corps A' se charge, ainsi il perd son équilibre électrostatique temporairement.

On appelle vecteur densité de courant  $\vec{j}$  (voir la figure II.24), le vecteur tangent à la ligne de courant, et donné par:  $\vec{j} = \rho_m \vec{v}_m$  (II.60)

Avec  $\rho_m$  et  $\vec{v}_m$  sont la densité volumique des charges mobiles et la vitesse moyenne de déplacement de ces charges respectivement.

La charge qui traverse par unité de temps l'unité de surface perpendiculaire à la direction de déplacement des charges mobiles ; est présentée par le module de vecteur densité de courant  $\vec{j}$  ;

On exprime l'unité de la densité de courant par ampère par mètre carré ( $\text{Am}^{-2}$ ).

Le courant  $I$  traversant une surface ( $S$ ) quelconque est le flux de  $\vec{j}$  à travers cette surface. On peut donc

$$\text{écrire: } I = \iint_S \vec{j} \cdot \vec{n} \cdot d\vec{S} \quad (\text{II.61})$$

Lorsque le vecteur densité de courant  $\vec{j}$  est indépendant du temps, c'est-à-dire le régime stationnaire, le flux de  $\vec{j}$  est conservatif ce qui conduit aux relations intégrale et locale :

$$\oiint_{(S)} \vec{j} \cdot \vec{n} \cdot d\vec{S} = 0 \quad (\text{II.62})$$

$$\text{Avec : } \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0 \quad (\text{II.63})$$

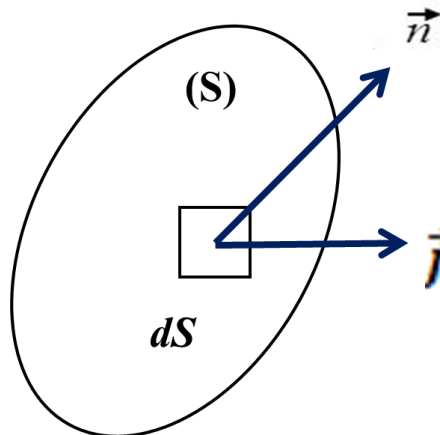


Figure II.24. Vecteur densité de courant

### II.1.B.3. Densité surfacique du courant ( $\vec{j}_S$ ) :

Une densité de courant surfacique est la densité d'un courant qui est sur une surface. On dit qu'un courant admet une densité surfacique  $\vec{j}_S$  de courant sur une surface  $S$  si l'épaisseur  $\Delta_e$  de la couche où circulent les charges mobiles de densité volumique  $\rho_m$  est très inférieure aux dimensions latérales de la surface  $S$ .

$$\text{La densité de courant surfacique est donnée par : } \vec{j}_S = \int_0^{\Delta_e} \vec{j} \text{ de} \quad (\text{II.64})$$

Avec  $de$  est l'élément de l'épaisseur.

Dont le module de  $\vec{j}_S$  s'exprime en ampères par mètre (A/m ou A m<sup>-1</sup>).

Ainsi le courant électrique qui parcourt une surface  $S$  est égal au flux du vecteur densité surfacique de courant à travers une ligne. L'intensité passant à travers une ligne [AA'] contenue dans la surface  $S$  est

$$\text{donnée par la formule suivante : } I_S = \int_A^{A'} \vec{j}_S \cdot \vec{n} dl \quad (\text{II.65})$$

Où  $\vec{n}$  est un vecteur unitaire tangent à la surface  $S$  et normal à la ligne [AA'] en tout point et  $dl$  est l'élément de longueur de la ligne [AA']

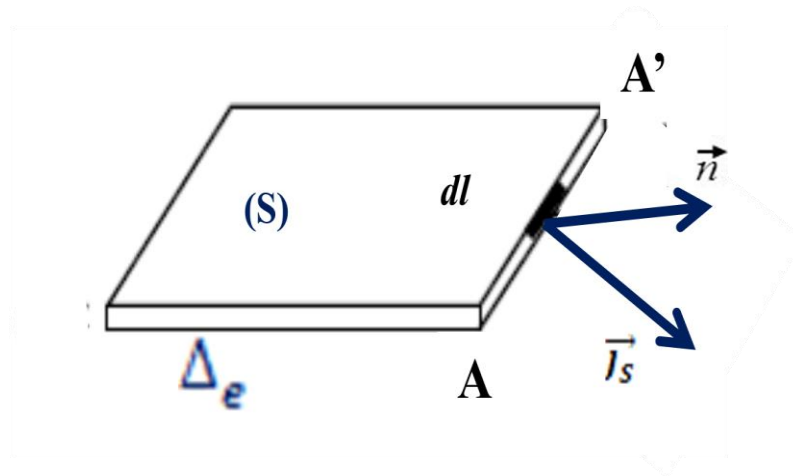


Figure II.25 .Densité surfacique du courant

#### II.1.B.4.Loi d'Ohm :

Appelée loi d'Ohm en référence au physicien allemand Georg Ohm (1789-1854), est une relation liant les courants qui apparaissent dans un conducteur aux causes qui les produisent.

##### II.1.B.4.1.Loi d'Ohm macroscopique :

A l'échelle macroscopique, La loi d'Ohm est utilisée pour déterminer la relation entre l'intensité, la tension, et la résistance dans un circuit électrique.

Pour un condensateur métallique, sous une température constante, le rapport entre la tension et l'intensité du courant électrique qui le traverse, est constant et égale la résistance de ce condensateur. La loi d'Ohm est représentée par l'équation suivante:  $R = \frac{V}{I}$  (II.66)

La constante  $R$  est, par définition la résistance électrique du conducteur, elle est exprimée en ohms( $\Omega$ )

$U$  représente la tension dont l'unité est le Volt (V).

$I$  représente l'intensité du courant, elle est exprimée en Ampère (A).

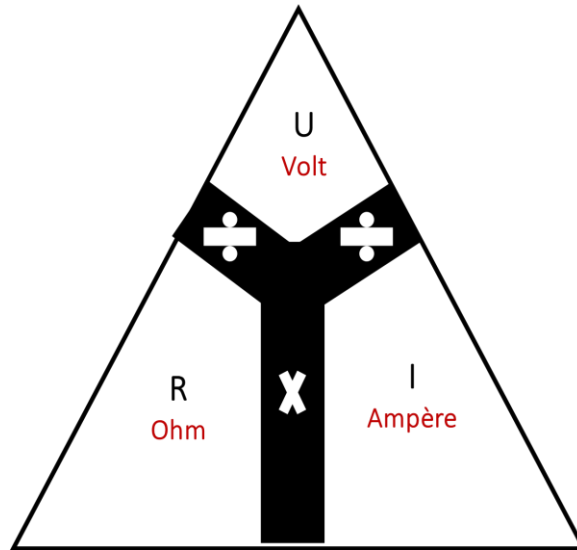


Figure II.26. Triangle représentant la loi d'Ohm

#### II.1.B.4.2. Loi d'Ohm microscopique (ou locale) :

Sous l'action d'un champ électrique  $\vec{E}$ , les charges du condensateur se mettent en mouvement et la densité de courant  $\vec{j}$  a pour valeur :

$$\vec{j} = \sigma \vec{E} \quad (\text{II.67})$$

On appelle le coefficient  $\sigma$  : **la conductivité électrique** du matériau conducteur, son unité est Siemens  $m^{-1}$  ( $S \cdot m^{-1}$ ) (Ou  $\Omega^{-1} \cdot m^{-1}$ ).

Cette expression est générale, elle constitue la forme locale de la loi d'Ohm, en tout point du matériau : *dans un condensateur ohmique, les vecteurs densité  $\vec{j}$  de courant et champ électrique  $\vec{E}$  sont proportionnels.*

**Remarque:** La conductivité  $\sigma$  est une grandeur locale positive, dépend uniquement de la nature et les propriétés du matériau.

Si  $V_A - V_{A'}$  désignent les potentiels entre deux points A et A' distant de  $L$  dans le conducteur, la norme du champ électrique est égale aussi à:

$$V_A - V_{A'} = \int E \, dl \quad (\text{II.68})$$

Ainsi, La loi d'Ohm traduit l'effet du déplacement des charges au champ électrique  $\vec{E}$  auquel correspond une différence de potentiel en fonction du matériau caractérisé par sa résistance.

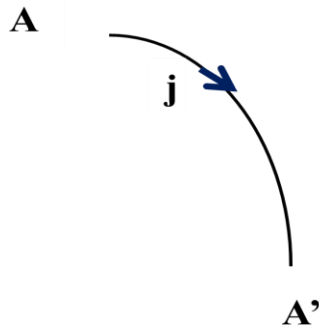


Figure II.27 Circuit filiforme AA' parcouru par un courant  $j$

### Résistivité électrique :

L'inverse de la conductivité s'appelle **résistivité électrique** du conducteur noté souvent  $\rho$

$$\text{Donc on peut écrire } \rho = \frac{1}{\sigma}. \quad (\text{II.69})$$

Son unité est l'ohm .mètre ( $\Omega \cdot m$ ).

### II.1.C-Rappel et compléments sur la magnéto-statique:

#### II.1.C.1.Définition :

La **magnéto-statique** est l'étude des phénomènes magnétiques où le champ est indépendant du temps, c'est-à-dire champ magnétique statique. Ce champ est produit par les courants électriques et par la matière aimantée.

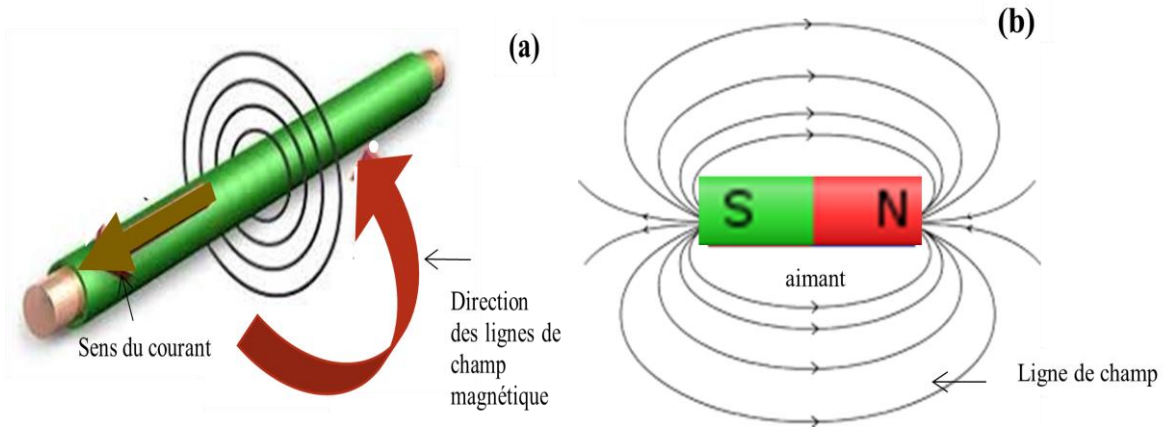


Figure II.28 Champ magnétique créé par un courant électrique (a) et Champ magnétique créé par un aimant(b)

#### II.1.C.2.Force de Lorentz :

On considère une charge ponctuelle  $q$  en mouvement avec une vitesse  $\vec{v}$ , plongée dans un champ électrique  $\vec{E}$  et dans un champ magnétique  $\vec{B}$ , elle sera soumise alors à une force magnétique  $\vec{F}_m$  en plus de la force électrique  $\vec{F}_e$ .

$$\text{La force électrique } \vec{F}_e \text{ est donnée par : } \vec{F}_e = q\vec{E} \quad (\text{II.70})$$

$$\text{La force magnétique } \vec{F}_m \text{ est décrite par : } \vec{F}_m = q\vec{v} \times \vec{B} \quad (\text{II.71})$$

La force résultante agissant sur la particule chargée est appelée **force de Lorentz**; elle s'écrit :

$$\vec{F} = \vec{F}_e + \vec{F}_m = q[\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}] \quad (\text{II.72})$$



**Remarque:**

-La composante électrique  $\vec{F}_e$  ne dépend pas de la vitesse de la charge, Par contre La composante magnétique  $\vec{F}_m$  dépend de la vitesse de la charge.

-La force électrique  $\vec{F}_e$  est colinéaire au champ électrique  $\vec{E}$ , par contre La force magnétique  $\vec{F}_m$  est orthogonale à la fois à la vitesse  $\vec{v}$  de la charge et au champ magnétique  $\vec{B}$ .

**Unités:**

Le champ magnétique  $\vec{B}$  se mesure en Tesla (T).

Le champ électrique  $\vec{E}$  s'exprime en Volts sur mètre (V/m).

La vitesse  $\vec{v}$  en mètre sur seconde m/s.

La charge q en Coulomb ( C).

**II.1.C.3. Le champ magnétique :**

Les expériences sont succédées durant plusieurs années et elles montrent que le champ magnétique est créé par des particules chargées en mouvement (courants électriques).

**a-Circulation d'un champ magnétique :**

Considérons un parcours (courbe) quelconque C limitée par deux points A<sub>1</sub> et A<sub>2</sub>. La circulation de  $\vec{B}$  sur

C est définie par : 
$$C = \int_{A_1}^{A_2} \vec{B} \cdot d\vec{l} \tag{II.73}$$

Si la courbe C est fermée A<sub>1</sub>≡A<sub>2</sub>, ceci implique que : 
$$C = \oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} \tag{II.74}$$

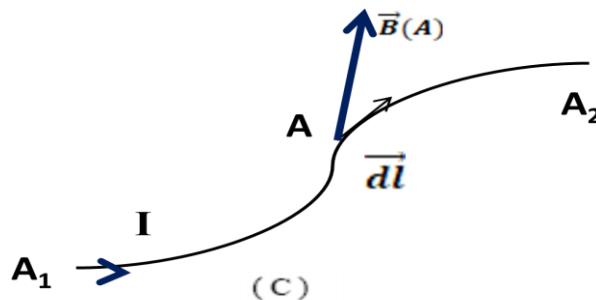


Figure II.29 .Circulation d'un champ magnétique

Ce théorème est l'équivalent du théorème de Gauss en électrostatique. Il permet de déterminer le module de  $\vec{B}$  lorsqu'on connaît la direction et le sens.

Plusieurs courants électriques passant à travers la courbe fermée (C) sont représentés dans la figure II.30.

Le théorème d'Ampère s'exprime sous la forme :  $\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum_{i=1}^n I_i$ . (II.75)

$\mu_0$  est la perméabilité magnétique du vide.  $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ Hm}^{-1}$ .

### b-Enoncé de la règle d'Ampère:

La circulation de  $\vec{B}$  le long d'une courbe  $\Gamma$  fermée et orientée, appelée contour d'Ampère, est égale à  $\mu_0$  fois la somme algébrique des courants engendrés par la surface délimitée par  $\Gamma$ .

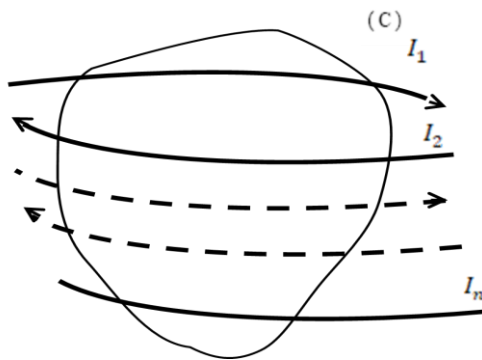


Figure II.30. courants à travers une courbe fermée

### c. Application du théorème d'Ampère :

**Le champ magnétique  $\vec{B}$  créé par un courant  $I$  est donné par le théorème d'Ampère :**

L'étude d'un champ magnétique  $\vec{B}$  généré par un courant électrique permanent  $I$  est basée sur la dernière équation.

Considérons la ligne de champ comme un cercle de rayon  $r$  entourant un fil. Pour raison de symétrie, le champ  $\vec{B}$  est le même en tout point de ce cercle et en est tangent.

Donc d'après le théorème d'Ampère:  $\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I$ . (II.76)

Où  $\Gamma$  est une courbe fermée quelconque traversée par le courant électrique  $I$ .

$\oint_c \vec{B} \cdot d\vec{l} = \oint_c B \cdot dl$   $\vec{B}$  et  $d\vec{l}$  sont colinéaires (II.77)

$$\oint_c \vec{B} \cdot d\vec{l} = B(r) \oint_c dl \quad B \text{ est constant sur } \Gamma \quad (\text{II.78})$$

$$\oint_c \vec{B} \cdot d\vec{l} = 2\pi r B(r) = \mu_0 I \quad (\text{II.79})$$

$$\text{Alors : } B(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \quad (\text{II.80})$$

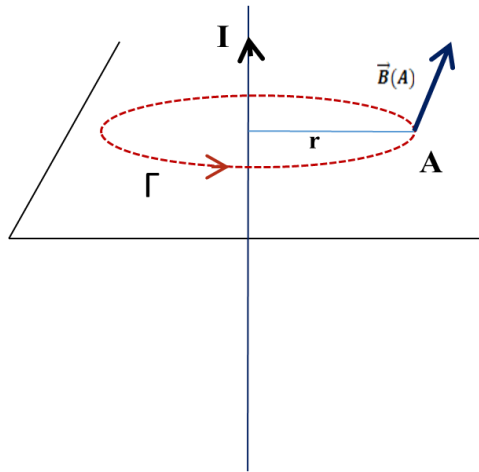


Figure II.31. Champ magnétique  $\vec{B}$  créé par un courant  $I$

Si le courant  $I$  correspond à une distribution de charges électriques mobiles définissant un vecteur densité de courant  $\vec{j}$ , alors le courant  $I$  encerclé par la boucle fermée  $\Gamma$  est le flux de  $\vec{j}$  à travers une surface quelconque délimitée par  $\Gamma$

$$I = \iint_S \vec{j} \cdot d\vec{S} \quad (\text{II.81})$$

$$\text{Alors le théorème d'ampère prend la forme : } \oint_\Gamma \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \iint_S \vec{j} \cdot d\vec{S} \quad (\text{II.82})$$

$$\text{En utilisant le théorème de Stokes: } \oint_\Gamma \vec{B} \cdot d\vec{l} = \iint_S \vec{\nabla} \times \vec{B} \cdot d\vec{S} \quad (\text{II.83})$$

$$\text{On trouve: } \iint_S \vec{\nabla} \times \vec{B} \cdot d\vec{S} = \mu_0 \iint_S \vec{j} \cdot d\vec{S} \quad (\text{II.84})$$

Cette égalité étant vraie quelle que soit la surface  $S$ , on obtient la forme locale du théorème d'Ampère qui s'écrit :  $\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$  (II.85)

#### d- Flux conservatif du champ magnétique

Le flux du champ magnétique est appelé flux magnétique et noté  $\phi^m$ .

Le flux magnétique à travers une surface fermée quelconque S est nul  $\phi^m = 0$ , Le champ magnétique est dit à **flux conservatif**. Cette propriété est traduite par l'intégrale suivante :

$$\oint_{(S)} \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 \quad (\text{II.86})$$

D'autre part, d'après le théorème de Gauss- Ostrogradski, on trouve l'équation du flux magnétique :

$$\phi^m = \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (\text{II.87})$$

Le flux magnétique étant en webers (Wb= Tm<sup>2</sup>).

#### II.1.C.4. Le vecteur excitation magnétique :

Le vecteur excitation magnétique noté  $\vec{H}$ , Dans l'air ou dans le vide: l'excitation magnétique et l'induction sont colinéaires et la relation entre eux est très simple:

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu} \quad (\text{II.88})$$

Au sein d'un matériau magnétique; il en est de même, mais on fait intervenir la perméabilité relative du matériau  $\mu_r$  :

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0 \mu_r} \quad (\text{II.89})$$

H : excitation magnétique en Ampère par mètre (A.M<sup>-1</sup>)

$\mu$ : Perméabilité absolue du milieu.

L'équation d'ampère s'écrit donc :

$$\oint \vec{\nabla} \times \vec{H} \cdot d\vec{S} = \oint \vec{j} \cdot d\vec{S} \quad (\text{II.90})$$

Ou encore sous la forme locale :

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{j} \quad (\text{II.91})$$

#### II.1.C.5. Potentiel vecteur $\vec{A}$ :

##### Jauge de Coulomb :

En électrostatique on a vu que :  $\vec{\nabla} \times \vec{B} = 0$  et que la divergence du rotationnel d'un champ vectoriel est nulle  $div(\overrightarrow{rot})$ . On appelle  $\vec{A}$  le « potentiel vecteur » même s'il n'a pas les propriétés d'un potentiel. Il est défini par :

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \quad (\text{II.92})$$

Ce potentiel vecteur n'est pas défini de manière unique. En effet, considérons un autre champ vectoriel  $\vec{A}'$  tel que :

$$\vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla}\phi \quad (\text{II.93})$$

Calculons le champ magnétostatique  $\vec{B}$  associé à  $\vec{A}$ :

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times (\vec{A}') = \vec{\nabla} \times \vec{A} + \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \varphi) = \vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{B} \quad (\text{II.94})$$

Car le rotationnel du gradient d'un champ vectoriel est égal à zéro.

Donc on voit que les deux potentiels vecteurs  $\vec{A}$  et  $\vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla} \varphi$  qui ne diffèrent que par  $\vec{\nabla} \varphi$  conduisent au même champ magnétostatique  $\vec{B}$ . On peut dire que le potentiel vecteur est défini à un gradient près. Pour définir  $\vec{A}$  de manière unique, il faut imposer une condition supplémentaire à  $\vec{A}$ . Cette condition porte le nom de *condition de jauge*.

En magnétostatique la condition de *jauge de Coulomb* la plus utilisée est :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0 \quad (\text{II.95})$$

### Équation de Poisson pour $\vec{A}$ :

$$\text{On a trouvé dans le théorème d'Ampère : } \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} \quad (\text{II.96})$$

$$\text{En remplaçant } \vec{B} \text{ par } \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \text{ dans la relation précédente, on obtient: } \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \mu_0 \vec{J} \quad (\text{II.97})$$

$$\text{Donc, on peut écrire: } \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A} = \mu_0 \vec{J} \quad (\text{II.98})$$

$$\text{Et en tenant compte de la jauge de Coulomb } \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0, \text{ on obtient: } -\nabla^2 \vec{A} = \mu_0 \vec{J}. \quad (\text{II.99})$$

$$\text{Ce résultat constitue l'équation de Poisson pour le potentiel vecteur : } \nabla^2 \vec{A} = -\mu_0 \vec{J}. \quad (\text{II.100})$$

$$\text{En absence de courants, nous obtenons l'équation de Laplace pour } \vec{A}: \nabla^2 \vec{A} = \vec{0}. \quad (\text{II.101})$$

### II.1.C.6. La loi de Biot-Savart (J. Baliste Biot 1774-1862/Félix Savard 1791-1841) :

Cette loi donne l'expression de l'induction magnétique en un point de l'espace, créée par un conducteur, de forme quelconque est traversé par un courant électrique.

#### 1-Formule de Biot et savart :

Le champ magnétique  $\vec{B}$  créé en un point M par un courant filiforme d'intensité I circulant le long d'une ligne  $\Gamma$  est la somme des champs magnétiques élémentaires  $d\vec{B}$  créés par chaque élément de longueur  $d\vec{l}$  de  $\Gamma$  et centré sur P:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{(l)} \frac{\vec{j}^{(P)} \times \vec{u}}{\|\vec{r}\|^2} dl_p \quad (\text{II.102})$$

Où  $\vec{u} = \frac{\overrightarrow{PM}}{PM}$

### 2-Démonstration :

Dans les calculs suivants, en utilisant Potentiel électrostatique créé par une distribution linéique de charges de densité  $\lambda$  sur un longueur ( $l$ )

#### a-La loi de Biot-Savart pour $\vec{A}$ :

Pour la résolution de l'équation de Poisson pour  $\vec{A}$ , nous procéderons par analogie avec la solution obtenue dans le cas de l'électrostatique pour le potentiel électrostatique.

L'équation de Poisson pour le potentiel électrostatique  $V$  créé par une distribution linéique de charges de densité  $\lambda$  sur une longueur ( $l$ ):

$$\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (\text{II.103})$$

Admet comme solution: 
$$V(M) = \int_{(l)} \frac{\lambda(P)}{4\pi\epsilon_0\|\overrightarrow{PM}\|} dl_p \quad (\text{II.104})$$

Nous avons trouvé l'équation de *Poisson* pour le potentiel vecteur : 
$$\nabla^2 \vec{A} = -\mu_0 \vec{J}. \quad (\text{II.105})$$

En utilisant les trois équations aux dérivées partielles pour chacune des composantes  $A_x$ ,  $A_y$  et  $A_z$  de  $\vec{A}$ , on obtient:

$$\begin{cases} \nabla^2 A_x = -\mu j_x \\ \nabla^2 A_y = -\mu j_y \\ \nabla^2 A_z = -\mu j_z \end{cases} \quad (\text{II.106})$$

Par analogie: 
$$\begin{cases} A_x(M) = \int_{(l)} \frac{\mu_0 j_x(P)}{4\pi\|\overrightarrow{PM}\|} dl_p \\ A_y(M) = \int_{(l)} \frac{\mu_0 j_y(P)}{4\pi\|\overrightarrow{PM}\|} dl_p \\ A_z(M) = \int_{(l)} \frac{\mu_0 j_z(P)}{4\pi\|\overrightarrow{PM}\|} dl_p \end{cases} \quad (\text{II.107})$$

Ce qui peut être écrit sous une forme vectorielle qui constitue la **loi de Biot-Savart** pour le potentiel

$$\text{vecteur } \vec{A}(M) = \int_{(l)} \frac{\mu_0 \vec{j}(P)}{4\pi \|PM\|} dl_p \quad (\text{II.108})$$

La loi de **Biot-Savart** dans un système de coordonnées cartésiennes est donnée par cette relation :

$$\vec{A}(x, y, z) = \int_{(l)} \frac{\mu_0 \vec{j}(x_p, y_p, z_p)}{4\pi \sqrt{(x-x_p)^2 + (y-y_p)^2 + (z-z_p)^2}} dl_p \quad (\text{II.109})$$

La dernière expression permet d'effectuer un calcul direct du potentiel vecteur  $\vec{A}$  au point  $M(x, y, z)$  créé par une distribution linéique de courants dans une longueur  $(l)$  qui est découpée en éléments de longueurs  $dl_p$  localisées aux points  $P(x_p, y_p, z_p)$  où les courants sont définis localement par le vecteur densité de courant  $\vec{j}(x_p, y_p, z_p)$ .

### b-Loi de Biot-Savart pour le champ magnétique $\vec{B}$ :

On a le champ magnétique  $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$  alors :

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \int_{(l)} \frac{\mu_0 \vec{j}(x_p, y_p, z_p)}{4\pi \sqrt{(x-x_p)^2 + (y-y_p)^2 + (z-z_p)^2}} dl_p \quad (\text{II.110})$$

L'opérateur  $\vec{\nabla} \times$  peut être introduit dans l'intégrale et on trouve alors :

$$\vec{B} = \int_{(l)} \vec{\nabla} \times \frac{\mu_0 \vec{j}(x_p, y_p, z_p)}{4\pi \sqrt{(x-x_p)^2 + (y-y_p)^2 + (z-z_p)^2}} dl_p \quad (\text{II.111})$$

$$\text{Rappelons que:} \quad \vec{\nabla} \times (f \vec{u}) = \vec{\nabla} f \times \vec{u} + f \vec{\nabla} \times \vec{u} \quad (\text{II.112})$$

$$\text{D'où : } \vec{\nabla} \times \left( \frac{\vec{j}(x_p, y_p, z_p)}{4\pi \sqrt{(x-x_p)^2 + (y-y_p)^2 + (z-z_p)^2}} \right) =$$

$$\vec{\nabla} \left( \frac{1}{4\pi \sqrt{(x-x_p)^2 + (y-y_p)^2 + (z-z_p)^2}} \right) \times \vec{j}(P) + \frac{1}{4\pi \sqrt{(x-x_p)^2 + (y-y_p)^2 + (z-z_p)^2}} \vec{\nabla} \times \vec{j}(P) \quad (\text{II.113})$$

$$\text{Or : } \vec{\nabla} \left( \frac{1}{4\pi \sqrt{(x-x_p)^2 + (y-y_p)^2 + (z-z_p)^2}} \right) = - \frac{\vec{PM}}{\|PM\|^3} \quad (\text{II.114})$$

Et comme on calcule le rotationnel en dérivant par rapport à  $x, y$  et  $z$  et que  $\vec{j}(P)$  ne dépend que de  $x_p, y_p$

$$\text{et } z_p: \quad \vec{\nabla} \times \vec{j}(P) = \vec{0} \quad (\text{II.115})$$

On obtient la loi de Biot-Savart pour le champ magnétique  $\vec{B}$

$$\vec{B} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \int_{(l)} \frac{\overrightarrow{PM} \times \vec{j}(P)}{\|\overrightarrow{PM}\|^3} dl_p \quad (\text{II.116})$$

Le vecteur unitaire du vecteur  $\overrightarrow{PM}$  est  $\vec{u}$ , l'équation ci-dessus devient :

$$\vec{B} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \int_{(l)} \frac{\vec{u} \times \vec{j}(P)}{\|\overrightarrow{PM}\|^2} dl_p \quad (\text{II.117})$$

$$\text{Donc on peut écrire: } \vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{(l)} \frac{\vec{j}(P) \times \vec{u}}{\|\overrightarrow{PM}\|^2} dl_p \quad (\text{II.118})$$

$$\text{Ou bien: } \vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{(l)} \frac{\vec{j}(P) \times \vec{r}}{\|\vec{r}\|^2} dl_p \quad (\text{II.119})$$

Avec:  $\vec{r} = \overrightarrow{PM}$

Cette relation est appelée la loi de Biot-Savart et utilisée pour calculer le champ magnétique  $\vec{B}$ , elle exprime le champ magnétique créé au point  $M$  par les vecteurs densités de courants  $\vec{j}(P)$  localisés aux point  $P$  à longueur  $l$ .

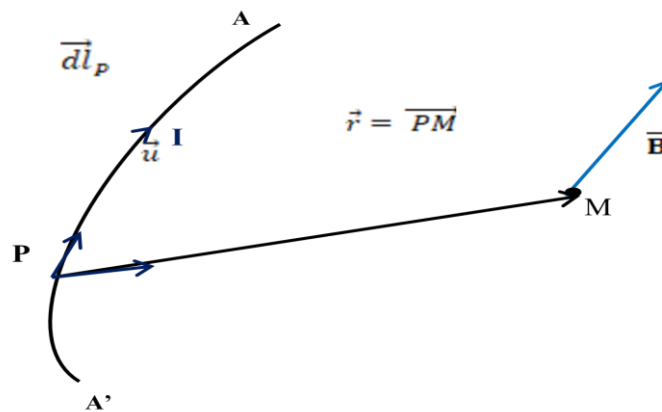


Figure II.32 .Champ magnétique élémentaire créé par un courant électrique élémentaire.



**II.1.C.7. En résumé :**

Le tableau **II.3** illustre la loi de Biot-Savart pour le champ magnétique  $\vec{B}$  :

	Distribution linéique	Distribution surfacique	Distribution volumique
<b>Champ magnétique <math>\vec{B}</math></b>	$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{(l)} \frac{\vec{j}(P) \times \vec{u}}{\ \vec{r}\ ^2} dl_p$	$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \iint_{(S)} \frac{\vec{j}(P) \times \vec{u}}{\ \vec{r}\ ^2} dS_p$	$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{(\tau)} \frac{\vec{j}(P) \times \vec{u}}{\ \vec{r}\ ^2} d\tau_p$

Tableau **II.3.** La de Biot-Savart pour le champ magnétique  $\vec{B}$

Le tableau **II.4** rassemble les deux équations fondamentales de la magnétostatique dans le vide :

	Théorème d'Ampère	Equation du flux magnétique
<b>Forme locale</b>	$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$	$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$
<b>Forme intégrale</b>	$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \iint_{(S)} \vec{j} \cdot d\vec{S}$	$\oiint_{(S)} \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$

Tableau **II.4.** Deux équations fondamentales de la magnétostatique dans le vide

## Partie 2. Le régime variable

### II-2.1. Introduction:

**Le régime variable** est caractérisé par des phénomènes particuliers liés à la dépendance des champs en fonction du temps qui sont: Le phénomène de la capacité, la propagation et le phénomène d'induction.

Dans cette partie nous intéressons par l'étude de phénomène de l'induction électromagnétique et de phénomène de la capacité

### II-2.2. Définition de l'induction électromagnétique:

Ce phénomène a été découvert et étudié par le physicien anglais faraday, il est à la base du fonctionnement de la plupart des convertisseurs d'énergie électrique. Ce phénomène conduit à l'apparition d'une force électromotrice dans un conducteur électrique soumis à un flux de champ magnétique variable.

### II-2.3. Loi de Faraday :

Cette loi dit que la force électromotrice d'induction f.e.m.(induite)  $e$  dans un circuit fermé (C) placé dans un champ magnétique est proportionnelle à la variation au cours du temps  $dt$  du flux du champ magnétique qui entre dans le circuit: 
$$e = -\frac{d\Phi}{dt} \quad (\text{II.120})$$

Où  $\Phi$  est le flux du champ magnétique à travers le circuit.

### II.2.4. Équation de Maxwell-Faraday :

La variation dans le temps du flux  $\Phi$  du champs magnétique à travers un circuit fermé ( C ) entraîne l'apparition d'une *force électromotrice d'induction (f.e.m)* :

$$e = \oint_{(C)} \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d\Phi}{dt} \quad (\text{II.121})$$

Le flux  $\Phi$  de champs  $\vec{B}$  à travers le circuit (C) est par définition égal à

$$\Phi = \iint_{(S)} \vec{B} \cdot d\vec{S} \quad (\text{II.122})$$

Où (S) est une surface orientée s'appuyant sur le contour orienté (C).

$$\text{Donc on peut écrire : } \oint_{(C)} \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \iint_{(S)} \vec{B} \cdot d\vec{S} \quad (\text{II.123})$$

En permutant les opérateurs d'intégration et de dérivation on a :

$$\oint_{(C)} \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \iint \frac{\partial(\vec{B} \cdot d\vec{S})}{\partial t} = - \iint_{(S)} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} \tag{II.124}$$

Car le circuit (C) étant immobile, la surface (S) l'est aussi et  $d\vec{S}$  est indépendant du temps.

En utilisant le théorème de Stokes nous pouvons écrire :

$$\oint_{(C)} \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \iint_{(S)} \vec{\nabla} \times \vec{E} \cdot d\vec{S} = - \iint_{(S)} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} \tag{II.125}$$

Ce qui nous fournit la forme locale de la relation **Maxwell-Faraday** suivante:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \tag{II.126}$$

D'après l'étude du phénomène d'induction électromagnétique, on peut conclure que : En chaque point de l'espace où existe un champ magnétique variable nous devons associer un champ électrique induit variable à circulation non conservative c'est-à-dire ne dérivant pas d'un potentiel.

L'ensemble de ces deux champs ( $\vec{E}$ ,  $\vec{B}$ ) constitue le champ électromagnétique.

### II.2.5. Le théorème de Maxwell-Ampère :

#### II.2.5.1 Le phénomène de capacité :

La figure II.33 représente un circuit électrique simple ; ce circuit est composé d'un groupement d'éléments: une source de courant (ou générateur de courant ), un condensateur, une résistance et les fils condensateur....

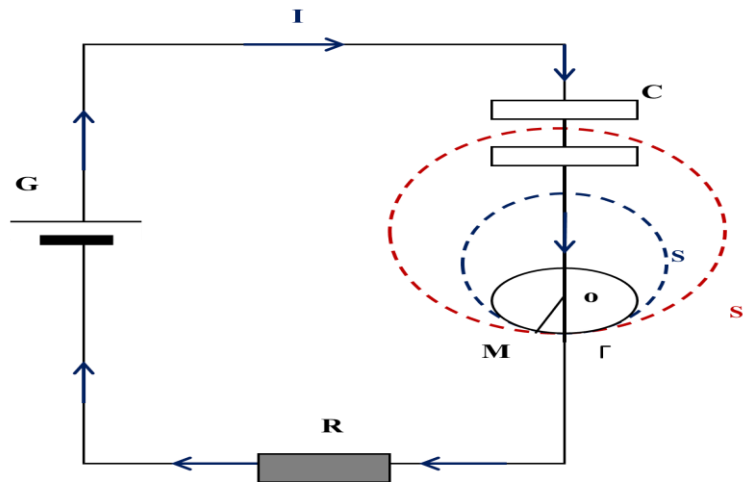


Figure II.33. Circuit électrique

Lorsqu'on relie le condensateur  $C$  à la source  $G$ , il circule pendant un temps très court un courant variable  $I(t)$ . On applique le théorème d'Ampère pour calculer le champ magnétique  $\vec{B}$  en  $M$ , créé par ce courant variable  $I(t)$ .

-L'intégrale curviligne de  $\vec{B}$  sur une boucle fermée  $\Gamma$  de rayon  $OM = r$  égale :

$$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I \quad (\text{II.127})$$

-En appliquant le théorème d'Ampère sous sa forme intégrale sur deux surfaces différentes  $S$  et  $S'$  s'appuyant sur le contour  $\Gamma$  :

-Le courant total traversant la surface  $S$  est bien égal au courant  $I$  et on trouve :

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \quad (\text{II.128})$$

-La surface  $S'$  n'est traversée par aucun courant parce que les charges électriques ne se déplacent pas entre les plaques du condensateur. On trouve alors:

$$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = 0 \quad (\text{II.129})$$

Donc  $\vec{B} = \vec{0}$ . Ce résultat est en contradiction avec le résultat obtenu avec la surface  $S$ . Il faut modifier le théorème d'Ampère pour lever cette confusion.

Pendant la charge du condensateur il y a un champ électrique variable est égal à  $\vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$  (II.130)

Avec  $\sigma$  est la densité superficielle de charges électriques sur les plaques du condensateur.

$q = \sigma \Sigma$ . Est la charge totale portée par une armature du condensateur de surface  $\Sigma$ .

La relation entre le courant de conduction  $I$  à l'extérieur du condensateur et la charge du condensateur est

$$I = \frac{dq}{dt} \quad (\text{II.131})$$

$$\text{D'où: } I = \frac{dq}{dt} = I = \frac{d(\sigma \Sigma)}{dt} = \frac{d(\epsilon_0 E)}{dt} \Sigma = \epsilon_0 \frac{d(E)}{dt} \Sigma = \frac{dD}{dt} \Sigma \quad (\text{II.132})$$

Avec  $D = \epsilon_0 E$  est le vecteur excitation électrique entre les armatures du condensateur.

**Le courant de déplacement  $I_D$**  est un terme introduit par Maxwell pour étendre aux régimes variables dans le temps le théorème d'Ampère valide en magnétostatique.

Le courant de déplacement  $I_D$  entre les armatures du condensateur, est lié au champ électrique variable entre les armatures du condensateur. Mais il ne correspond pas à un mouvement de charges électriques.

**Remarque:**

En supposant que  $I_D$  est le courant entre les plaques du condensateur. Le courant total traversant la surface  $S'$  est  $I_D$  et si on utilise le théorème d'Ampère en prenant en compte le courant de déplacement, on trouve le même résultat que celui qui a été obtenu en utilisant la surface  $S$ .

**II.2.5.2 Le vecteur densité de courant de déplacement :**

Le courant total  $I_T$  est donné par la relation  $I_T = I + I_D$  (II.133)

Où  $I$  et  $I_D$  sont le courant lié au mouvement des charges électriques et le courant de déplacement qui correspond à un champ électrique variable respectivement. A ces courants on associe, respectivement, le vecteur densité de courant lié au mouvement des charges électriques  $\vec{j}$  et le vecteur densité de courant de déplacement  $\vec{j}_D$

Avec: 
$$\vec{j}_D = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$
 (II.134)

Et  $\vec{j}_T$  est le vecteur densité de courant total: 
$$\vec{j}_T = \vec{j} + \vec{j}_D$$
 (II.135)

**II.2.5.3 Le théorème de Maxwell-Ampère :**

Le théorème d'Ampère peut être généralisé à condition de l'appliquer au courant total.

On obtient finalement l'équation de **Maxwell-Ampère**:

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j}_T = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$
 (II.136)

Alors : 
$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$
 (II.137)

La forme intégrale du théorème d'Ampère généralisé devient :

$$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \iint_{(S)} \mu_0 \vec{j}_T \cdot d\vec{S} = \iint_{(S)} (\mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}) \cdot d\vec{S}$$
 (II.138)

Alors : 
$$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \iint_{(S)} (\mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}) \cdot d\vec{S}$$
 (II.139)

On trouve le résultat fondamental : *Un champ électrique variable crée un champ magnétique.*

### II.2.6. Hypothèse de Maxwell :

Selon les hypothèses de Maxwell, les théorèmes de Gauss pour le champ électrique et le champ magnétique du régime statique sont encore valables pour les régimes variables. Nous avons remarqué aussi que l'étude du régime variable nous a amenés à modifier les deux autres équations caractéristiques des régimes statiques. Le tableau II.5 rassemble les équations de Maxwell en régime statique et en régime variable dans le vide:

Régime statique	Régime variable
Théorème de Gauss $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$	
Théorème de Gauss $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$	
$\vec{\nabla} \times \vec{E} = \vec{0}$	$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$
$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$	$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$

Tableau II.5. Équations de Maxwell en régime statique et en régime variable dans le vide

### II.2.7. En résumé :

Les équations de Maxwell locales et intégrales dans le vide sont:

Equations	Forme locale	Forme intégrale
Maxwell –Gauss Ou Théorème de Gauss pour $\vec{E}$	$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$	$\oiint_{(S)} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint_{(\tau)} \rho d\tau$
Maxwell-flux magnétique ou Maxwell-Faraday	$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$	$\oiint_{(S)} \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$
Maxwell-Faraday	$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$	$\oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \iint_{(S)} \vec{B} \cdot d\vec{S}$
Maxwell-Ampère	$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$	$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \iint_{(S)} \mu_0 (\vec{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}) \cdot d\vec{S}$

Tableau II.6. Équations de Maxwell locales et intégrales dans le vide

## CHAPITRE III

### *Propagation des Ondes Electromagnétiques*



**Michael Faraday**

(Newington, 22 septembre 1791-Hampton Court, 25 août 1867) est un physicien et un chimiste britannique, connu pour ses travaux fondamentaux dans le domaine de l'électromagnétisme, l'électrochimie, l'induction électromagnétique, le diamagnétisme et l'électrolyse. Il donne son nom à de multiples lois et phénomènes dans ces domaines, notamment la loi de Faraday (ou Lenz-Faraday) en induction électromagnétique, les lois de Faraday en électrochimie, l'effet Faraday, ou encore à des dispositifs expérimentaux comme la cage de Faraday et la cavité de Faraday. Le farad, unité de capacité électrique, est également nommé en son honneur.

**III.1. Équation de propagation pour  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  dans le vide:**

En physique, le vide est un milieu caractérisé par une perméabilité magnétique  $\mu_0$  et une permittivité diélectrique  $\epsilon_0$ . En absence de courants et de charges, les quatre équations de Maxwell s'écrivent:

$$\overrightarrow{\text{div}} \vec{E} = \vec{0} \quad (\text{III.1})$$

$$\overrightarrow{\text{div}} \vec{B} = 0 \quad (\text{III.2})$$

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (\text{III.3})$$

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (\text{III.4})$$

Pour obtenir une équation en fonction du seul champ magnétique  $\vec{B}$ , nous pouvons éliminer le champ électrique  $\vec{E}$  des équations (III.1) et (III.2):

$$\frac{\partial}{\partial t} (\overrightarrow{\text{rot}} \vec{E}) = \overrightarrow{\text{rot}} \left( \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) = \frac{1}{\mu_0 \epsilon_0} \overrightarrow{\text{rot}} (\overrightarrow{\text{rot}} \vec{B}) = \frac{1}{\mu_0 \epsilon_0} [\overrightarrow{\text{grad}} (\text{div} \vec{B}) - \Delta \vec{B}] = -\frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} \quad (\text{III.5})$$

$$\text{Alors: } \Delta \vec{B} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = 0 \quad (\text{III.6})$$

Éliminons le champ  $\vec{B}$  des équations (III.3) et (III.4) pour une équation en fonction du seul champ électrique  $\vec{E}$ :

$$\frac{\partial}{\partial t} (\overrightarrow{\text{rot}} \vec{B}) = \overrightarrow{\text{rot}} \left( \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) = -\overrightarrow{\text{rot}} (\overrightarrow{\text{rot}} \vec{E}) = -\Delta \vec{E} - \overrightarrow{\text{grad}} (\text{div} \vec{E}) = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \quad (\text{III.7})$$

$$\text{D'où: } \Delta \vec{E} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0 \quad (\text{III.8})$$

Les équations (III.6) et (III.8) sont les équations de propagation du champ électromagnétique.

**Remarque:**

Dans le vide les ondes électromagnétiques se propagent à la vitesse de la lumière

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = 3 \times 10^8 \text{ m/s} \quad (\text{III.9})$$

Alors: les équations de propagation du champ électromagnétique s'écrivent :

$$\Delta \vec{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0 \quad (\text{III.10})$$



$$\Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = 0 \quad (\text{III.11})$$

On peut écrire aussi

$$\vec{\nabla}^2 \vec{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0 \quad (\text{III.12})$$

$$\vec{\nabla}^2 \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = 0 \quad (\text{III.13})$$

### III.2.L'onde plane progressive sinusoïdale :

#### III.2.1.Quelques définitions:

**Onde:** Est la propagation d'une perturbation produisant sur son passage une variation réversible des propriétés physiques locales du milieu. Elle transporte de l'énergie sans transporter de matière. Elle se déplace avec une vitesse déterminée qui dépend des caractéristiques du milieu de propagation.

**Onde plane:** Est une onde pour laquelle la perturbation ( $\vec{E}$  et  $\vec{B}$ ) ne se propage que dans une seule direction ( z par exemple)

**Onde sinusoïdale ou onde harmonique :** Est une onde qui peut être décrite par une fonction sinusoïdale du temps.

**Onde progressive:** Une onde est dite progressive lorsqu'elle se déplace dans le sens positif de l'axe x.

**Onde rétrograde:** Une onde est dite rétrograde lorsqu'elle se déplace dans le sens négatif de l'axe x.

#### III.2.2.Onde progressive:

Si en un point O de l'espace, on enregistre une perturbation de la forme:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \cos \omega t \quad (\text{III.14})$$

Où  $\omega$  est la pulsation, elle est exprimée en radian par seconde (rad/s)

Pour une onde plane progressive dans le sens  $z > 0$ , on aura:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \cos \omega \left( t - \frac{z}{c} \right) \quad (\text{III.15})$$

Si  $\vec{E}$  est suivant l'axe Ox on a:

$$\vec{E}_x = \vec{E}_{ox} \cos \omega(t - \frac{z}{c}) \quad (\text{III.16})$$

On peut écrire l'onde plane en deux façons:

$$1/- E_x = E_{ox} \cos(\omega t - \frac{\omega}{c} z) = E_{ox} \cos(\omega t - k z) \quad (\text{III.17})$$

$$\vec{E}_x = \vec{E}_{ox} \cos(\omega t - \vec{k} \vec{r}) \quad (\text{III.18})$$

$$2/- E_x = E_{ox} \cos(\omega t - \omega \frac{z}{c}) = E_{ox} \cos 2\pi(\frac{t}{T} - \frac{z}{\lambda}) \quad (\text{III.19})$$

Avec T est la période :  $T = \frac{2\pi}{\omega}$  ( en seconde )

Et  $\lambda$  est la longueur d'onde:  $\lambda = cT$ . ( en m)

Le vecteur d'onde  $\vec{k}$  indique la direction de propagation de l'onde. Il est exprimé en Ampère (rad/m). Son module est:  $k = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda}$

### III.2.3. Représentation complexe:

L'onde plane progressive sinusoïdale est définie sous la forme complexe, par :

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 e^{i(\omega t - \vec{k} \vec{r})} \quad (\text{III.20})$$

Ainsi la dérivation par rapport au temps donne:

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \omega \vec{E} \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = -\omega^2 \vec{E} \quad (\text{III.21})$$

$$\text{Si bien qu'il est possible décrire formellement : } \frac{\partial}{\partial t} \equiv \omega \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2}{\partial t^2} \equiv -\omega^2 \quad (\text{III.22})$$

Dans un système de coordonnées cartésiennes et par l'utilisation de la définition du laplacien vectoriel, on peut montrer que :  $\vec{\nabla}^2 \vec{E} = -k^2 \vec{E}$  (III.23)

$$\text{Il en découle: } -k^2 \vec{E} + \vec{\nabla}^2 \vec{E} = \vec{0} \quad (\text{III.24})$$

L'équation de propagation prend cette forme:

$$[-k^2 + \vec{\nabla}^2] \vec{E} = \vec{0} \quad (\text{III.25})$$

La solution de l'équation de l'onde plane progressive sinusoïdale, dite relation de dispersion, s'écrit:  $k = \frac{\omega}{c}$ .

**III.2.4. Structure de l'onde uniforme plane:**

En absence de charges électriques, le théorème du Gauss en notation complexe est donné par:

$$\overrightarrow{div}\vec{E} = \vec{\nabla}\vec{E} = (-i\vec{k})\vec{E} = 0 \tag{III.26}$$

Soit encore  $\vec{k}\vec{E} = 0$  c'est-à-dire le vecteur d'onde  $\vec{k}$  est perpendiculaire au champ électrique  $\vec{E}$ , le champ électrique est dit transversal. A partir du théorème de Maxwell-Faraday :

$$\overrightarrow{rot}\vec{E} = \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \tag{III.27}$$

Pour une onde plane progressive sinusoïdale on a :

$$\vec{\nabla} \times (\vec{E}) = -i\vec{k} \times \vec{E} \tag{III.28}$$

$$D'où : -i\vec{k} \times \vec{E} = -i\omega\vec{B} \tag{III.29}$$

$$A\ partir\ de\ la\ dernière\ équation,\ nous\ pouvons\ écrire\ que:\ \vec{B} = \frac{\vec{k} \times \vec{E}}{\omega} \tag{III.30}$$

Alors: le triplet de vecteurs  $(\vec{k}, \vec{B}, \vec{E})$  forme donc un trièdre direct,  $\vec{B}$  et  $\vec{E}$  sont orthogonaux entre eux et orthogonaux à la direction de propagation  $\vec{k}$

Le champ magnétique  $\vec{B}$  est, ainsi, complètement déterminé en direction et en module  $|\vec{B}| = \frac{kE}{\omega}$ . En tenant compte de la relation  $\omega = kc$  :

$$|\vec{B}| = \frac{E}{c} \tag{III.31}$$

$$Et:\ \vec{B} = \frac{E}{c} e^{i(\omega t - \vec{k}\vec{r})} \tag{III.32}$$

Ces résultats permettent de définir la structure de l'onde plane progressive harmonique (voir Figure III.1).

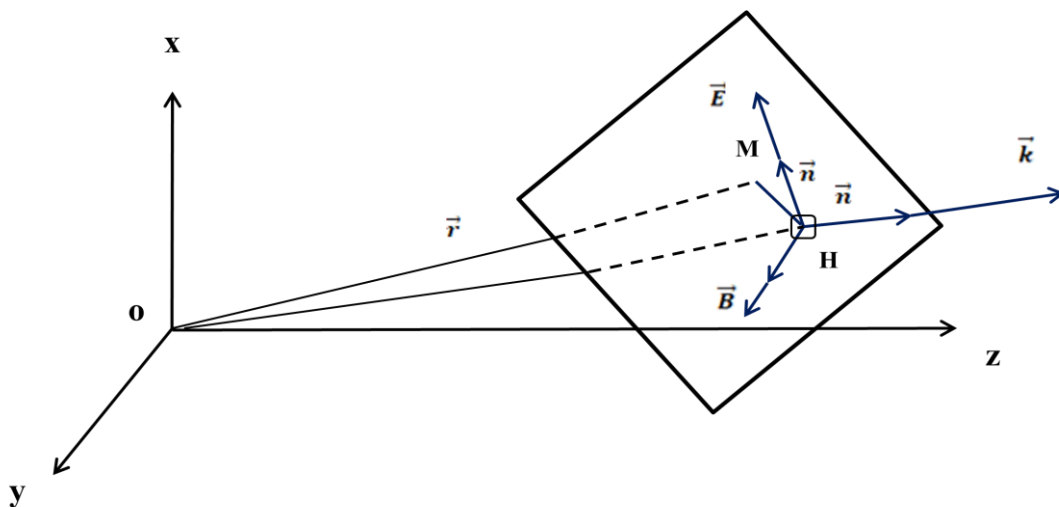


Figure III.1. Structure de l'onde plane progressive harmonique

**III.3. Propagation des ondes électromagnétiques dans les métaux:****III.3. 1. Propagation dans un milieu conducteur (non isolant):****III.3. 1.1. Temps de relaxation d'un conducteur:**

Dans un semi-conducteur, le temps de relaxation diélectrique donne une mesure du temps nécessaire au rétablissement de la neutralité électrique.

Si la permittivité du matériau est  $\epsilon$  et la charge est  $dq = \rho d\tau$ , l'équation de Maxwell-Gauss s'écrit :  $\text{div}(\epsilon \vec{E}) = \rho$  (III.33)

Enfin, la conservation de la charge impose :

$$\text{div} \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \sigma \text{div} \vec{E} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\sigma}{\epsilon} \rho = 0 \quad \text{(III.34)}$$

La solution de la dernière équation est :

$$\rho = \rho_0 e^{-\frac{\sigma}{\epsilon} t} = \rho_0 e^{-\frac{t}{T}} \quad \text{(III.35)}$$

Où  $T = \frac{\epsilon}{\sigma}$  est le temps de relaxation du milieu.

**Remarque:**

-Le temps de relaxation pour les bons conducteurs:  $T=10^{-20}$  (S)

-Le temps de relaxation pour les mauvais conducteurs:  $T=10^{-10}$  (S)

**III.3. 1.2. Equation de propagation dans un conducteur :**

Dans un conducteur, les équations de Maxwell s'écrivent:

$$\overrightarrow{\text{div}} \vec{E} = \vec{0} \quad \text{(III.36)}$$

$$\overrightarrow{\text{div}} \vec{H} = 0 \quad \text{(III.37)}$$

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \quad \text{(III.38)}$$

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \mu_0 \left[ \sigma \vec{E} + \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right] \quad \text{(III.39)}$$

**Remarque :**

Pour les métaux ferromagnétiques (cobalt, nickel .....), la permittivité diélectrique du milieu  $\epsilon$  peut être différente de celle du vide  $\epsilon_0$ .

On cherche une solution des équations de Maxwell, sous la forme d'onde plane sinusoïdale, dont la direction de propagation est Oz, et dont le vecteur champ électrique est dirigé suivant l'axe Ox:

$$E_x = E_0 e^{i(\omega t - kz)} \quad \text{et} \quad E_y = E_z = 0 \quad \text{(III.40)}$$

$$\text{Avec : } -i \vec{k} \times \vec{E} = -i\omega \vec{B} \quad (\text{III.41})$$

$$\text{L'équation (III.33) permet d'écrire: } -i k E_x = -i \mu_0 \omega H_y \quad (\text{III.42})$$

$$\text{Donc: } \frac{E_x}{H_y} = \frac{\mu_0 \omega}{k}, \quad (\text{III.43})$$

et l'équation (III.39) donne :  $-i k H_y = (\sigma + i\varepsilon \omega) E_x$ .

$$\text{Alors: } \frac{E_x}{H_y} = \frac{ik}{\sigma + i\varepsilon \omega} \quad (\text{III.44})$$

D'après les équations (III.43) et (III.44), on trouve la relation de dispersion de l'onde électromagnétique dans un milieu métallique :

$$k^2 = \varepsilon \mu_0 \omega^2 \left(1 - i \frac{\sigma}{\varepsilon \omega}\right) \quad (\text{III.45})$$

**Remarque: (Equation de propagation dans un milieu isolant) :**

Si la conductivité est nulle ( $\sigma = 0$ ), la relation de dispersion d'un isolant **parfait (diélectrique)** est donnée par:

$$k^2 = \varepsilon \mu_0 \omega^2 \quad (\text{III.46})$$

### III.3. 2. Cas d'un milieu peu conducteur :

Dans un matériau peu conducteur, le temps de relaxation  $T$  est grand vis-à-vis de la période de l'onde  $\frac{2\pi}{\omega}$

$$\text{Alors: } \frac{2\pi}{\omega} \ll T \approx \frac{1}{\omega} \ll \frac{\varepsilon}{\sigma} \quad (\text{III.47})$$

$$\text{Donc : } \frac{\sigma}{\omega \varepsilon} \ll 1 \quad (\text{III.48})$$

D'après la relation (III.45) :

$$k^2 = \varepsilon \mu_0 \omega^2 \left(1 - i \frac{\sigma}{\varepsilon \omega}\right) \quad (\text{III.49})$$

$$k = \pm \omega \sqrt{\varepsilon \mu_0} \left(1 - i \frac{\sigma}{\varepsilon \omega}\right)^{\frac{1}{2}} \approx \pm \omega \sqrt{\varepsilon \mu_0} \left(1 - i \frac{\sigma}{2\varepsilon \omega}\right) \quad (\text{III.50})$$

**Remarque :**

L'existence d'un vecteur d'onde complexe traduit l'existence du phénomène d'absorption. Il existe aussi un phénomène de dispersion car la vitesse de phase de l'onde dépend de la pulsation.

$$\text{Le champ électrique associé à l'onde s'écrit: } E_x(z, t) = E_0 e^{i\omega t} e^{-ikz} \quad (\text{III.51})$$

$$\text{Alors : } -ikz = -iz \left[ \pm \omega \sqrt{\varepsilon \mu_0} \left(1 - i \frac{\sigma}{2\varepsilon \omega}\right) \right] = \pm z \omega \sqrt{\varepsilon \mu_0} \left(i + \frac{\sigma}{2\varepsilon \omega}\right) \quad (\text{III.52})$$

Remarque: la solution négative est en adéquation avec la physique et décrit l'absorption de l'onde, par contre la solution positive représente une onde diverge à l'infini

$$E_x(z, t) = E_0 e^{-\frac{\sigma}{2} \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon}} z} e^{i\omega(t - \sqrt{\varepsilon \mu_0} z)} \quad (\text{III.53})$$

$$\text{Alors: } E_x(z, t) = E_0' (z) e^{i\omega(t - \frac{z}{v_\varphi})} \quad (\text{III.54})$$

Nous pouvons noter que la forme de l'onde dans le milieu absorbant (métallique) est ressemblée à celle obtenue dans le cas d'un milieu isolant, mais cette fois ci avec une amplitude  $E_0' (z)$  non plus constante, mais décroissante en  $z$ , cette décroissance en  $z$  est liée à la partie imaginaire de  $\vec{k}$  ( $\sigma = 0 \Rightarrow \text{Im}(\vec{k}) = 0 \Rightarrow E_0' = E_0$ )

On remarque que la vitesse de phase dans le milieu peu conducteur a la même expression que dans un milieu isolant, cette vitesse est définie par :

$$V_\varphi = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon \mu_0}} \quad (\text{III.55})$$

### III.3. 3.Cas d'un milieu très conducteur: EFFET DE PEAU:

En physique, L'effet de peau (ou plus rarement effet Kelvin) est un phénomène électromagnétique qui fait que, à fréquence élevée, le champ électromagnétique ne pénètre que très superficiellement à l'intérieur d'un conducteur.

Pour simplifier la relation de dispersion (III.45) en utilisant un exemple précis que pour un bon conducteur :  $\frac{\sigma}{\omega \varepsilon} \gg 1$

#### Exemple d'un excellent conducteur :

Pour un conducteur en cuivre , on a les valeurs ci-dessous :

$$\sigma = 0.6 \times 10^8 (\Omega m)^{-1} , \quad \varepsilon = 8.85 \times 10^{-12} \text{ S.I} , \quad \omega = 2\pi \times 10^9 \text{ S}^{-1}$$

$$\text{Alors : } \frac{\sigma}{\varepsilon \omega} = 1.1 \times 10^8 \gg 1$$

$$\text{D'après la relation de dispersion, } k^2 \text{ devient: } k^2 = -i \mu_0 \sigma \omega = \mu_0 \sigma \omega e^{-i\frac{\pi}{2}}$$

$$\text{Alors: } k = \pm(1 - i) \sqrt{\frac{\mu_0 \sigma \omega}{2}} \quad (\text{III.56})$$

L'onde électromagnétique s'écrit:

$$E_x(z, t) = E_0 e^{-\sqrt{\frac{\mu_0 \sigma \omega}{2}} z} e^{i(\omega t - \sqrt{\frac{\mu_0 \sigma \omega}{2}} z)} \quad (\text{III.57})$$

$$\text{Alors: } E_x(z, t) = E_0' e^{-\frac{z}{\delta}} e^{i(\omega t - \frac{z}{\delta})} \quad (\text{III.58})$$

$$\text{D'où: } \delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \sigma \omega}} \quad (\text{III.59})$$

$\delta$  est appelé l'épaisseur de peau, ou la profondeur de pénétration de l'onde, et correspond à une diminution de l'amplitude de l'onde dans le rapport e :

$$|E_x(z + \delta)| = \frac{|E_x(z)|}{e} \quad (\text{III.60})$$

**Remarque:**

L'épaisseur de peau de l'onde dans le milieu métallique est très petite.

La vitesse de phase de l'onde est :

$$V_\varphi = \omega\delta = \sqrt{\frac{2\omega}{\mu_0\sigma}} \quad (\text{III.61})$$

Et comme  $\varepsilon_0\mu_0c^2=1$

$$\text{Donc:} \quad V_\varphi = c\sqrt{\frac{2\varepsilon_0\omega}{\sigma}} \ll c \quad (\text{III.62})$$

On peut conclure que la vitesse de phase est très petite devant celle de la lumière, par ailleurs en vertu des équations (III.43) et (III.56)

$$\frac{E_x}{H_y} = \frac{\mu_0\omega}{k} = \sqrt{\frac{\mu_0\omega}{\sigma}} e^{i\frac{\pi}{4}} \quad (\text{III.63})$$

Les vecteurs  $\vec{E}$  et  $\vec{H}$  ne sont plus en phase, comme dans le vide.

Le champ électrique dans ce cas est en avance de phase de  $\frac{\pi}{4}$  sur l'excitation magnétique.

On remarque que le vecteur  $\vec{H}$  dans le vide est plus petit que dans le milieu métallique. En effet dans le milieu métallique :

$$\left| \frac{E_x}{H_y} \right| = \sqrt{\frac{\mu_0\omega}{\sigma}} = \mu_0c\sqrt{\frac{\varepsilon_0\omega}{\sigma}} \ll \mu_0c \quad (\text{III.64})$$

$$\text{Par contre dans le vide:} \quad \frac{E_x}{H_y} = \mu_0c \quad (\text{III.65})$$

### III.3.4. Propagation des ondes planes électromagnétiques dans les gaz ionisés à basse pression:

#### III.3.4. 1. Définition d'un plasma :

Le plasma est appelé aussi «quatrième état de la matière», est un milieu composé d'un mélange neutres de particules, d'électrons négatifs et d'ions.

Par exemple, un plasma d'hydrogène est composé d'atomes d'hydrogène, de protons et d'électrons libres, en proportions différentes selon la nature du plasma, les particules chargées interagissent les unes avec les autres par l'intermédiaire des forces électromagnétiques.

On propose un modèle de plasma constitué de n électrons et de n ions par unité de volume.

Pour un plasma peu dense on néglige toutes interactions entre les ions

Avec :  $\vec{V}$  et  $\vec{v}$  sont les vitesses d'un ion et d'un électron respectivement.

On note masse  $m_{e^-}$   $m_{e^+}$  les masses des électrons et des ions.

Si un champ électrique extérieur  $\vec{E}$  est appliqué au plasma :

$$m_{e^+} \frac{d\vec{V}}{dt} = +e\vec{E} \quad \text{et} \quad m_{e^-} \frac{d\vec{v}}{dt} = -e\vec{E} \quad (\text{III.66})$$

$$\text{Par conséquent : } \frac{d\vec{V}}{dt} = -\frac{m_{e^-}}{m_{e^+}} \frac{d\vec{v}}{dt} \quad (\text{III.67})$$

$$\text{Soit, à une constante près : } \vec{V} = -\frac{m_{e^-}}{m_{e^+}} \vec{v} \quad (\text{III.68})$$

Par conséquent, comme  $\frac{m_{e^-}}{m_{e^+}} \ll 1$ , la vitesse des ions positifs est très faible vis-à-vis de celle

des électrons. On ne prendra en compte que le mouvement des électrons.

La densité volumique du plasma est :

$$\vec{j} = -ne\vec{v} + ne\vec{V} = -ne \left( 1 + \frac{m_{e^-}}{m_{e^+}} \right) \vec{v} \approx -ne\vec{v} \quad (\text{III.69})$$

Elle est pratiquement égale à celle des électrons.

### III.3.4.2. Equations de Maxwell dans le plasma:

On note  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  les champs électrique et magnétique associés à cette onde. Ces champs agissent sur les électrons du plasma et les mettent en mouvement. L'équation du mouvement

$$\text{d'un électron est : } m_{e^-} \frac{d\vec{v}}{dt} = -e\vec{E} - e\vec{v} \wedge \vec{B} \quad (\text{III.70})$$

$\|c \vec{B}\| = \|\vec{E}\|$ , donc ici  $\|c \vec{B}\| = \|\vec{E}\|$  sont du même ordre.

$$\text{Mais on suppose que } v \ll c, \text{ et donc on aura: } \|e\vec{v} \wedge \vec{B}\| \ll eE \quad (\text{III.71})$$

On pourra ainsi négliger la force magnétique vis-à-vis de la force électrique pour étudier le

$$\text{mouvement des électrons : } m_{e^-} \frac{d\vec{v}}{dt} = -e\vec{E} \quad (\text{III.72})$$

Les équations de Maxwell s'écrivent, en notant que la densité volumique de charges est nulle

$$\overrightarrow{\text{div}} \vec{E} = \vec{0} \quad (\text{III.73})$$

$$\overrightarrow{\text{div}} \vec{B} = 0 \quad (\text{III.74})$$

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (\text{III.75})$$

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (\text{III.76})$$



$$\text{Avec: } \frac{\partial \vec{j}}{\partial t} = -ne \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \frac{ne^2}{m_e} \vec{E} \quad (\text{III.77})$$

### III.3.4.3. Relation de dispersion des ondes électromagnétiques planes progressives monochromatiques :

Cherchons une solution complexe des équations de Maxwell sous la forme :

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(\omega t - \vec{k}\vec{r})} \quad \text{et} \quad \vec{B} = \vec{B}_0 e^{i(\omega t - \vec{k}\vec{r})} \quad (\text{III.78})$$

On en déduit alors :

$$i \vec{k} \times \vec{E} = i \vec{k} \vec{B} = 0 \quad (\text{III.79})$$

$$-i \vec{k} \wedge \vec{E} = -i \omega \vec{B} \quad (\text{III.80})$$

$$-i \vec{k} \wedge \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + i \omega \epsilon_0 \mu_0 \vec{E} \quad (\text{III.81})$$

$$\text{Et : } i \omega \vec{j} = \frac{ne^2}{m_e} \vec{E} \quad (\text{III.82})$$

$$\text{C'est-à-dire } \vec{j} = -i \frac{ne^2}{m_e - \omega} \vec{E} \quad (\text{III.83})$$

$$\text{Avec: } \vec{k} \wedge \vec{E} = \omega \vec{B}, \quad -\vec{k} \wedge \vec{B} = -\mu_0 \frac{ne^2}{m_e - \omega} \vec{E} + \omega \epsilon_0 \mu_0 \vec{E} \quad (\text{III.84})$$

$$\text{Il vient : } -\vec{k} \wedge \left( \frac{1}{\omega} \vec{k} \wedge \vec{E} \right) = \frac{1}{\omega} \vec{k}^2 \vec{E} = -\mu_0 \frac{ne^2}{m_e - \omega} \vec{E} + \omega \epsilon_0 \mu_0 \vec{E} \quad (\text{III.85})$$

$$\text{On en déduit la relation de dispersion : } k^2 = -\mu_0 \frac{ne^2}{m_e} + \omega^2 \epsilon_0 \mu_0 \quad (\text{III.86})$$

$$\text{Soit, avec } c^2 = \frac{1}{\epsilon_0 \mu_0} \quad (\text{III.87})$$

$$\text{et } \omega_p^2 = \frac{\mu_0 c^2 ne^2}{m_e} \quad (\text{Pulsation plasma}) \quad (\text{III.88})$$

$$\text{L'équation de dispersion devient: } k^2 = \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2} \quad (\text{Équation de Klein -Gordon}) \quad (\text{III.89})$$

Si  $\omega > \omega_p$  alors  $k$  réel: il y a alors propagation: la fréquence de plasma  $\omega_p$  constitue donc, ici, une fréquence de coupure en dessous de laquelle le phénomène de propagation disparaît.

alors  $k = \frac{\omega}{c}$  et  $v_\phi \approx c$ : le comportement du plasma est proche de celui du vide .

Si  $\omega < \omega_p$  , alors  $k$  est imaginaire pur et les ondes électromagnétiques sont évanescences; il ne peut y avoir propagation.

$$\text{Alors: } k = \pm i \sqrt{\frac{\omega_p^2 - \omega^2}{c^2}} = \pm i k'' \quad (\text{III.90})$$

Le champ électrique de l'onde s'écrit alors sous la forme :

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(\omega t)} e^{\pm k'' x} \quad \text{Soit} \quad \vec{E} = \vec{E}_0 e^{\pm k'' x} \cos(\omega t + \varphi_0) \quad (\text{III.91})$$

### III.3.4. 4. Structure de l'onde plane progressive harmonique :

-Domaine dispersif: le cas où  $\omega > \omega_p$  (Donc on a une propagation sans atténuation) :

$$k = \frac{\sqrt{\omega^2 - \omega_p^2}}{c} \quad (\text{III.92})$$

La vitesse de phase est :

$$v_\varphi(\omega) = \frac{\omega}{k} = \frac{c}{\sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}} \quad (\text{III.93})$$

L'indice de réfraction du plasma est donné par :

$$n = \frac{c}{v_\varphi} = \frac{ck}{\omega} \quad \text{soit } n = \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}} < 1 \quad (\text{III.94})$$

On voit que  $v_\varphi(\omega) > c$  et  $n < 1$ ; ceci n'est pas paradoxal car cette vitesse ne correspond pas à la vitesse de l'information ou de l'énergie (c'est le cas de la vitesse de groupe).

Les équations de Maxwell :

$$\vec{k} \cdot \vec{E} = \vec{k} \cdot \vec{B} = 0 \quad \text{et} \quad \vec{k} \wedge \vec{E} = \omega \vec{B} \quad (\text{III.95})$$

$$\text{Donnent en notation réelle: } \vec{B} = \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega} \quad (\text{III.96})$$

Le trièdre  $(\vec{E}, \vec{B}, \vec{k})$  est direct et  $B = \frac{kE}{\omega} = \frac{E}{v_\varphi}$ , alors la structure de l'onde plane progressive monochromatique est similaire à celle du vide, c'est-à-dire seule la vitesse de phase est différente et dépend de la pulsation de l'onde.

$$\text{Enfin, on justifie a posteriori l'approximation } \|e\vec{v} \wedge \vec{B}\| \ll eE \quad (\text{III.97})$$

$$\text{Parce que: } \|e\vec{v} \wedge \vec{B}\| = ev \frac{E}{v_\varphi} \ll eE \quad \text{Et: } v_\varphi > c \quad (\text{III.98})$$

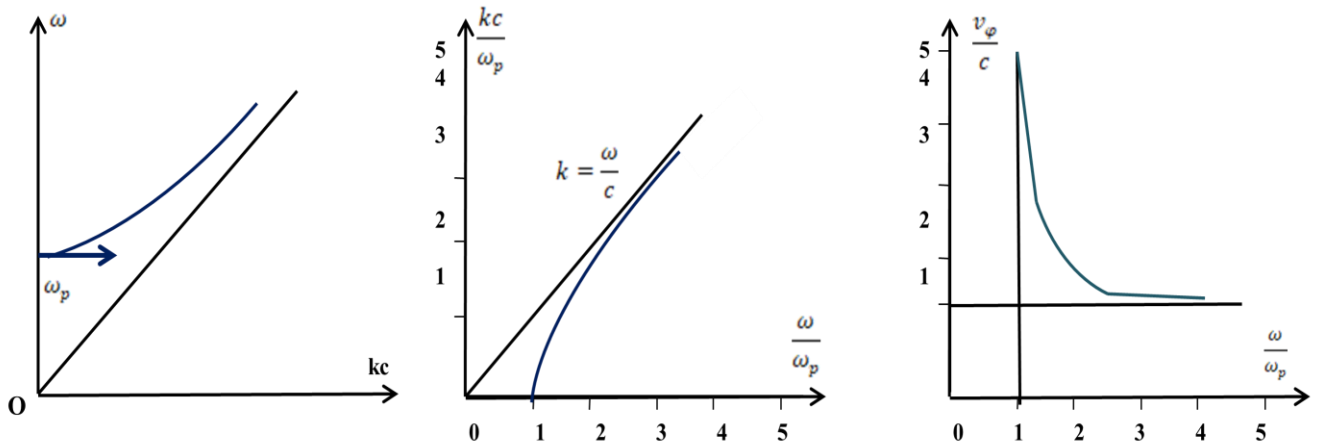


Figure III.2. Structure de l'onde plane progressive dans le plasma

### III.4. Réflexion et Réfraction

#### III.4. 1. Rappel: lois de la réflexion et de la réfraction

Dans cette partie on s'intéresse à l'étude des phénomènes de Réflexion et réfraction des ondes électromagnétiques.

On considère deux milieux notés 1 et 2 de caractéristiques respectives  $(\epsilon_1, \mu_1)$  et  $(\epsilon_2, \mu_2)$ . Les deux milieux sont séparés par une interface plane. Les propriétés électromagnétiques des deux milieux sont décrites par les indices de réfraction  $n_1$  et  $n_2$ .

Avec  $k_1$  et  $k_2$  les nombres d'ondes dans les milieux 1 et 2,  $\eta_1$  et  $\eta_2$  leur impédance.

On suppose qu'une onde plane de vecteur d'onde  $\vec{k}_i$ , issue du milieu 1, est incidente sur l'interface.

Les lois de *Snell-Descartes* (lois de la réflexion et de la réfraction) montrent que :

- Les vecteurs d'onde associés aux ondes réfléchie ( $\vec{k}_r$ ) et transmise ( $\vec{k}_t$ ) sont situés dans le même plan appelé plan d'incidence.

- Les angles d'incidence et de réflexion sont égaux :  $\theta_r = \theta_i$  (III.99)

- L'angle de réfraction est donné par la relation :  $k_1 \sin \theta_i = k_2 \sin \theta_t$  (III.100)

On note que ces lois résultent directement de la continuité d'au moins une composante du champ électromagnétique à l'interface.

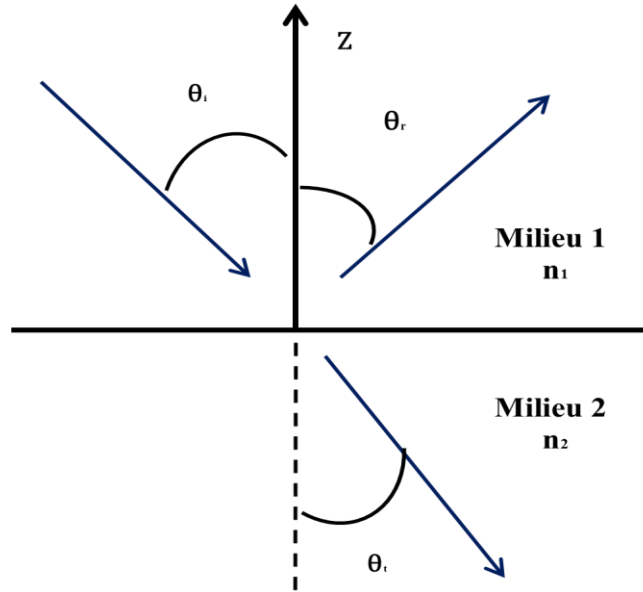


Figure III.3. Géométrie considérée pour la détermination des lois de Snell –Descartes

### III.4.2. Incidence normale:

Le champ est polarisé linéairement suivant Ox. Les champs électrique et magnétique des ondes incidentes sont:

$$\vec{E}_i = E_0 \vec{e}_x e^{-ik_1 z} \quad (\text{III.101})$$

$$\vec{H}_i = \frac{1}{\eta_1} \vec{e}_z \vec{E}_i = \frac{E_0}{\eta_1} \vec{e}_y e^{-ik_1 z} \quad (\text{III.102})$$

Le champ réfléchi s'écrit:

$$\vec{E}_r = R E_0 \vec{e}_x e^{+ik_1 z} \quad (\text{III.103})$$

$$\vec{H}_r = \frac{1}{\eta_1} (-\vec{e}_z) \vec{E}_r = -\frac{R E_0}{\eta_1} \vec{e}_y e^{+ik_1 z} \quad (\text{III.104})$$

Où  $R$  est le coefficient de réflexion.

Le champ transmis s'écrit:

$$\vec{E}_t = T E_0 \vec{e}_x e^{-ik_2 z} \quad (\text{III.105})$$

$$\vec{H}_t = \frac{1}{\eta_2} \vec{e}_z \vec{E}_t = \frac{T E_0}{\eta_2} \vec{e}_y e^{-ik_2 z} \quad (\text{III.106})$$

Où  $T$  est le coefficient de transmission.

En  $z=0$  c'est à dire au niveau de l'interface, la composante tangentielle des champs magnétique et électrique est continue :

$$\vec{e}_z (\vec{E}_1)_{z=0} = \vec{e}_z (\vec{E}_2)_{z=0} \quad (\text{III.107})$$

$$\vec{e}_z (\vec{H}_1)_{z=0} = \vec{e}_z (\vec{H}_2)_{z=0} \quad (\text{III.108})$$

Avec  $\vec{E}_1 = \vec{E}_i + \vec{E}_r$  (III.109)

$$\vec{H}_1 = \vec{H}_i + \vec{H}_r \quad (\text{III.110})$$

$$\vec{E}_2 = \vec{E}_t \quad (\text{III.111})$$

$$\vec{H}_2 = \vec{H}_t \quad (\text{III.112})$$

Nous obtenons :

$$\begin{cases} 1 + R = T \\ \frac{(1-R)}{\eta_1} = \frac{T}{\eta_2} \end{cases} \quad (\text{III.113})$$

Avec  $R = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1}$  (III.114)

$$T = \frac{2\eta_2}{\eta_2 + \eta_1} \quad (\text{III.115})$$

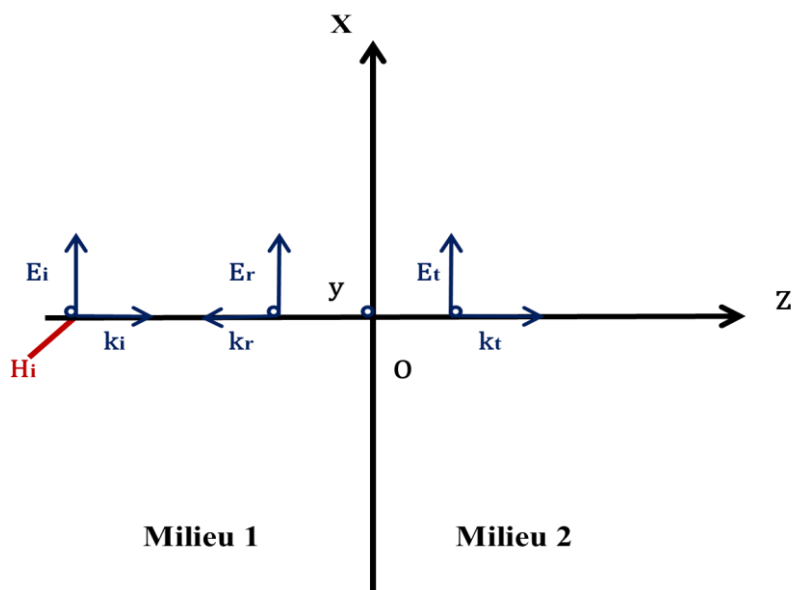


Figure III.4. Incidence normale

### II. 4.3. Incidence oblique : équations de Fresnel :

Nous distinguons maintenant deux situations différentes:

-La polarisation de l'onde incidente est parallèle au plan d'incidence

-La polarisation de l'onde incidente est perpendiculaire au plan d'incidence

#### a) polarisation parallèle (TM) :

Dans ce cas les rôles des champs électrique et magnétique sont inversés .Les champs électrique et magnétique des ondes incidentes sont:

$$\vec{E}_i = E_0 (\vec{e}_x \cos \theta_i - \vec{e}_z \sin \theta_i) e^{(-jk_{1x} x - jk_{1z} z)} \quad (\text{III.116})$$

$$= E_0 (\vec{e}_x \cos \theta_i - \vec{e}_z \sin \theta_i) e^{[-jk_1(x \sin \theta_i + z \cos \theta_i)]} \quad (\text{III.117})$$

$$\vec{H}_i = \frac{1}{\eta_1} (\vec{e}_x \sin \theta_i + \vec{e}_z \cos \theta_i) \times \vec{E}_i \quad (\text{III.118})$$

$$= \frac{E_0}{\eta_1} \vec{e}_y e^{[-jk_1(x \sin \theta_i + z \cos \theta_i)]} \quad (\text{III.119})$$

Le champ réfléchi s'écrit:

$$\vec{E}_r = R E_0 (\vec{e}_x \cos \theta_i + \vec{e}_z \sin \theta_i) e^{(-jk_{1x} x + jk_{1z} z)} \quad (\text{III.120})$$

$$= R E_0 (\vec{e}_x \cos \theta_i + \vec{e}_z \sin \theta_i) e^{[-jk_1(x \sin \theta_i - z \cos \theta_i)]} \quad (\text{III.121})$$

$$\vec{H}_r = \frac{1}{\eta_1} (\vec{e}_x \sin \theta_i - \vec{e}_z \cos \theta_i) \times \vec{E}_r \quad (\text{III.122})$$

$$= -\frac{R E_0}{\eta_1} \vec{e}_y e^{[-jk_1(x \sin \theta_i - z \cos \theta_i)]} \quad (\text{III.123})$$

Le champ transmis s'en déduit par :

$$\vec{E}_t = T E_0 (\vec{e}_x \cos \theta_t - \vec{e}_z \sin \theta_t) e^{(-jk_{2x} x - jk_{2z} z)} \quad (\text{III.124})$$

$$= T E_0 (\vec{e}_x \cos \theta_t - \vec{e}_z \sin \theta_t) e^{[-jk_2(x \sin \theta_t + z \cos \theta_t)]} \quad (\text{III.125})$$

$$\vec{H}_t = \frac{1}{\eta_2} (\vec{e}_x \sin \theta_t + \vec{e}_z \cos \theta_t) \times \vec{E}_t \quad (\text{III.126})$$

$$= \frac{T E_0}{\eta_2} \vec{e}_y e^{[-jk_2(x \sin \theta_t + z \cos \theta_t)]} \quad (\text{III.127})$$

#### Remarque :

Les coefficients R et T négatifs traduisent l'inversion de sens.

La continuité des composantes tangentielles des champs au niveau de l'interface conduit ici à

$$\begin{cases} (1 + R)\cos\theta_i = T\cos\theta_t \\ \frac{(1-R)}{\eta_1} = \frac{T}{\eta_2} \end{cases} \quad (\text{III.128})$$

D'où l'on tire les expressions des coefficients, appelées **équations de Fresnel** :

$$R_{TM} = \frac{\eta_2 \cos\theta_t - \eta_1 \cos\theta_i}{\eta_2 \cos\theta_t + \eta_1 \cos\theta_i} \quad (\text{III.129})$$

$$T_{TM} = \frac{2\eta_2 \cos\theta_i}{\eta_2 \cos\theta_t + \eta_1 \cos\theta_i} \quad (\text{III.130})$$

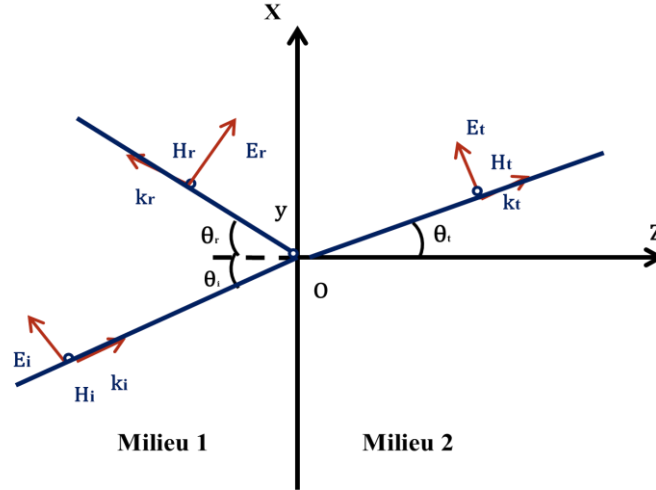


Figure III.5. Incidence oblique, polarisation parallèle (TM)

**b) polarisation perpendiculaire (TE) :**

Dans ce cas le champ électrique est selon l'axe Oz, il est perpendiculaire au plan d'incidence et donc parallèle à l'interface entre les deux milieux. Le champ magnétique est dans le plan xOy.

Champs incidents sont:

$$\vec{E}_i = E_0 \vec{e}_y e^{[-jk_1(x \sin \theta_i + z \cos \theta_i)]} \quad (\text{III.131})$$

$$\vec{H}_i = \frac{1}{\eta_1} (\vec{e}_x \sin \theta_i + \vec{e}_z \cos \theta_i) \times \vec{E}_i \quad (\text{III.132})$$

$$= \frac{E_0}{\eta_1} (-\vec{e}_x \cos \theta_i + \vec{e}_z \sin \theta_i) e^{[-jk_1(x \sin \theta_i + z \cos \theta_i)]} \quad (\text{III.133})$$

Les champs réfléchis:

$$\vec{E}_r = R E_0 \vec{e}_y e^{[-jk_1(x \sin \theta_i - z \cos \theta_i)]} \quad (\text{III.134})$$

$$\vec{H}_r = \frac{1}{\eta_1} (\vec{e}_x \sin \theta_i - \vec{e}_z \cos \theta_i) \times \vec{E}_r \quad (\text{III.135})$$

$$= -\frac{R E_0}{\eta_1} (\vec{e}_x \cos \theta_i + \vec{e}_z \sin \theta_i) e^{[-jk_1(x \sin \theta_i - z \cos \theta_i)]} \quad (\text{III.136})$$

Champs transmis :

$$\vec{E}_t = TE_0 \vec{e}_y e^{[-jk_2(x \sin \theta_t + z \cos \theta_t)]} \quad (\text{III.137})$$

$$\vec{H}_t = \frac{1}{\eta_2} (\vec{e}_x \sin \theta_t + \vec{e}_z \cos \theta_t) \times \vec{E}_t \quad (\text{III.138})$$

$$= \frac{TE_0}{\eta_2} (-\vec{e}_x \cos \theta_t + \vec{e}_z \sin \theta_t) e^{[-jk_2(x \sin \theta_t + z \cos \theta_t)]} \quad (\text{III.139})$$

On obtient les formules de Fresnel pour cette polarisation:

$$R_{TE} = \frac{\eta_2 \cos \theta_i - \eta_1 \cos \theta_t}{\eta_2 \cos \theta_i + \eta_1 \cos \theta_t} \quad (\text{III.140})$$

$$T_{TE} = \frac{2\eta_2 \cos \theta_i}{\eta_2 \cos \theta_i + \eta_1 \cos \theta_t} \quad (\text{III.141})$$

**Remarque :**

Si l'angle d'incidence est nulle  $\theta_i=0$  (incidence normale), les formules TE et TM conduisent évidemment au même résultat.

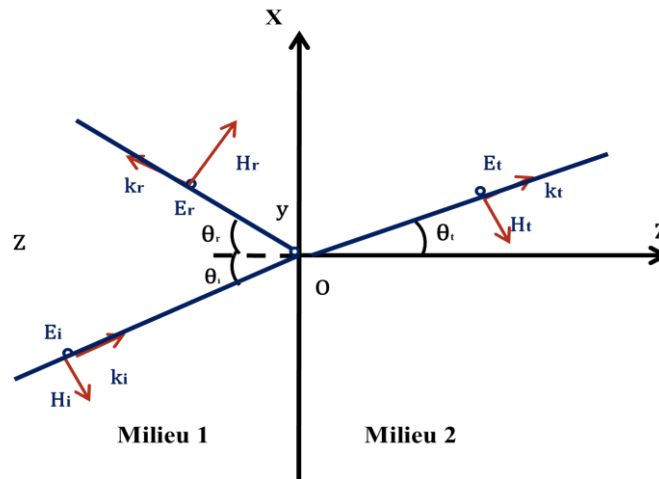


Figure III.6. Incidence oblique, polarisation parallèle (TE)

**II. 4.4. Cas de l'interface entre deux isolants magnétiques :**

Pour deux isolants magnétiques, les simplifications suivantes sont applicables :  $\mu_0 = \mu_1 = \mu_2$

$$\sin \theta_t = \frac{k_1}{k_2} \sin \theta_i = \sqrt{\frac{\epsilon_{r1}}{\epsilon_{r2}}} \sin \theta_i \quad (\text{III.142})$$

$$\cos \theta_t = \sqrt{1 - \sin^2 \theta_t} = \sqrt{1 - \frac{\epsilon_{r1}}{\epsilon_{r2}} \sin^2 \theta_i} \quad (\text{III.143})$$



$$\text{Ces équations nécessitent a priori d'avoir : } \sqrt{\frac{\epsilon_{r1}}{\epsilon_{r2}}} \sin\theta_i \leq 1 \quad (\text{III.144})$$

Cette condition est toujours vérifiée pour  $\epsilon_{r2} \geq \epsilon_{r1}$

Dans le cas contraire, elle fait apparaître un angle  $\theta_c$ , dit angle d'incidence critique :

$$\sin\theta_c = \sqrt{\frac{\epsilon_{r2}}{\epsilon_{r1}}} \quad (\text{III.145})$$

On considère par exemple l'expression du champ électrique transmis en polarisation TE.

Au delà de  $\theta_c$ , on a :

$$\sin\theta_t = \frac{k_1}{k_2} \sin\theta_i > 1 \quad (\text{III.146})$$

$$\cos\theta_t = \sqrt{1 - \left(\frac{k_1}{k_2} \sin\theta_i\right)^2} = \pm j \sqrt{\left(\frac{k_1}{k_2} \sin\theta_i\right)^2 - 1} \quad (\text{III.147})$$

$$\text{Alors : } \vec{E}_t = TE_0 \vec{e}_y e^{-jk_1 x \sin\theta_i} e^{\left(\pm \sqrt{(k_1 \sin\theta_i)^2 - (k_2)^2} z\right)} \quad (\text{III.148})$$

La dernière expression montre que le champ transmis se propage suivant la direction Ox et qu'il s'atténue suivant la direction Oz .En effet, le champ reste confiné au voisinage de l'interface, le long de laquelle il se propage.

Dans le cas d'une incidence quelconque. Les expressions des coefficients de réflexion peuvent être reformulées à l'aide de (III.143):

$$R_{TE} = \frac{\sqrt{\frac{\epsilon_{r1}}{\epsilon_{r2}}} \sqrt{1 - \frac{\epsilon_{r1}}{\epsilon_{r2}} \sin^2\theta_i} - \sqrt{1 - \sin^2\theta_i}}{\sqrt{\frac{\epsilon_{r1}}{\epsilon_{r2}}} \sqrt{1 - \frac{\epsilon_{r1}}{\epsilon_{r2}} \sin^2\theta_i} + \sqrt{1 - \sin^2\theta_i}} \quad (\text{III.149})$$

$$T_{TE} = \frac{-\sqrt{\frac{\epsilon_{r2}}{\epsilon_{r1}}} \sqrt{1 - \frac{\epsilon_{r1}}{\epsilon_{r2}} \sin^2\theta_i} + \sqrt{1 - \sin^2\theta_i}}{\sqrt{\frac{\epsilon_{r2}}{\epsilon_{r1}}} \sqrt{1 - \frac{\epsilon_{r1}}{\epsilon_{r2}} \sin^2\theta_i} + \sqrt{1 - \sin^2\theta_i}} \quad (\text{III.150})$$

On voit qu'il est possible d'annuler  $\Gamma_{TM}$  à condition de choisir :

$$\sin\theta_i = \sin\theta_b = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\epsilon_{r1}}{\epsilon_{r2}}}} \quad (\text{III.151})$$

$\theta_b$  est appelé angle de Brewster.

Si  $\epsilon_{r2}$  et  $\epsilon_{r1}$  sont différents : il est impossible d'annuler  $R_{TE}$  .

Les coefficients de transmission sont:

$$T_{TM} = \frac{2 \sqrt{\epsilon_{r1}} \sqrt{1 - \sin^2 \theta_i}}{\sqrt{\epsilon_{r1}} \sqrt{1 - \frac{\epsilon_{r1}}{\epsilon_{r2}} \sin^2 \theta_i} + \sqrt{\epsilon_{r2}} \sqrt{1 - \sin^2 \theta_i}} \quad \text{(III.152)}$$

$$T_{TE} = \frac{2 \sqrt{\epsilon_{r1}} \sqrt{1 - \sin^2 \theta_i}}{\sqrt{\epsilon_{r1}} \sqrt{1 - \sin^2 \theta_i} + \sqrt{\epsilon_{r2}} \sqrt{1 - \frac{\epsilon_{r1}}{\epsilon_{r2}} \sin^2 \theta_i}} \quad \text{(III.153)}$$

**Remarque :**

Le coefficient de transmission sera nul tandis que le coefficient de réflexion sera égal à 1. Ce cas correspond à la réflexion interne totale.

**III.4. 5. Réflexion et réfraction à la surface d'un bon conducteur**

On considère une onde plane incidente uniforme sinusoïdale polarisée rectilignement ( $\vec{E}_i \parallel Ox$ ) se propageant dans le vide selon l'axe Oz et arrivant sous incidence normale, à la surface plane d'un bon conducteur (conductivité infinie).

Physiquement, il n'y a pas d'onde transmise ( $\vec{E}_t = \vec{0}$  et  $\vec{B}_t = \vec{0}$ ) que les seuls courants vrais pouvant être induits par cette onde le sont sur la surface du métal. On note que les directions de polarisation des vecteurs incident et réfléchi sont identiques.

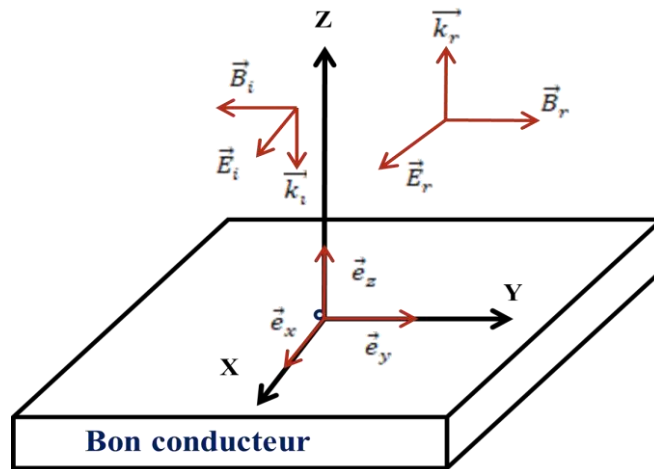


Figure III.7. Réflexion et réfraction à la surface d'un bon conducteur

Champs incidents sont:

$$\vec{E}_i = E_{0i} e^{i(\omega t + kz)} \vec{e}_x \quad \text{(III.154)}$$

$$\vec{B}_i = -\frac{E_{0i}}{c} e^{i(\omega t + kz)} \vec{e}_y \quad \text{(III.155)}$$

Les champs réfléchis:

$$\vec{E}_{0r} = E_{0r} e^{i(\omega t - kz)} \vec{e}_x \quad (\text{III.156})$$

$$\vec{B}_r = \frac{E_{0r}}{c} e^{i(\omega t - kz)} \vec{e}_y \quad (\text{III.157})$$

La continuité des composantes tangentielles des champs au niveau de l'interface ( $z=0$ ) conduit ici à :  $E_{0i} + E_{0r} = 0$  (III.158)

D'où  $E_{0r} = -E_{0i}$  (III.159)

Le champ électrique réfléchi a même amplitude que le champ électrique incident et il est déphasé de  $\pi$  par rapport à ce dernier.

Pour que le trièdre  $(\vec{k}_r, \vec{E}_r, \vec{B}_r)$  soit direct, il faut que le champ magnétique réfléchi  $\vec{B}_r$  soit dans le même sens que le champ magnétique incident  $\vec{B}_i$  c'est à dire que sa réflexion s'effectue sans changement de phase. Les ondes incidentes s'écrivent :

$$\vec{E}_i = E_{0i} e^{i(\omega t + kz)} \vec{e}_x \quad (\text{III.160})$$

$$\vec{B}_i = -\frac{E_{0i}}{c} e^{i(\omega t + kz)} \vec{e}_y \quad (\text{III.161})$$

Les ondes réfléchis sont:

$$\vec{E}_r = -E_{0i} e^{i(\omega t - kz)} \vec{e}_x \quad (\text{III.162})$$

$$\vec{B}_r = -\frac{E_{0i}}{c} e^{i(\omega t - kz)} \vec{e}_y \quad (\text{III.163})$$

Dans le vide, l'onde résultante est donnée par les relations suivantes:

$$\vec{E} = \vec{E}_i + \vec{E}_r = E_{0i} (e^{+ikz} - e^{-ikz}) e^{i\omega t} \vec{e}_x \quad (\text{III.164})$$

Et :  $\vec{B} = \vec{B}_i + \vec{B}_r = -\frac{E_{0i}}{c} (e^{+ikz} + e^{-ikz}) e^{i\omega t} \vec{e}_y$  (III.165)

Alors :  $\vec{E} = 2 E_{0i} \sin(kz) e^{i(\omega t + \frac{\pi}{2})} \vec{e}_x$  (III.166)

$$\vec{B} = 2 \frac{E_{0i}}{c} \cos(kz) e^{i(\omega t + \pi)} \vec{e}_y \quad (\text{III.167})$$

En revenant à la notation réelle

$$\vec{E} = 2 E_{0i} \sin(kz) \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) \vec{e}_x \quad (\text{III.168})$$

$$\vec{B} = 2 \frac{E_{0i}}{c} \cos(kz) \cos(\omega t + \pi) \vec{e}_y \quad (\text{III.169})$$

On peut conclure que les champs ne se propagent plus mais qu'ils oscillent sinusoïdalement en fonction du temps avec une amplitude qui est fonction de la distance  $z$ , leur déphasage étant de  $\frac{\pi}{2}$  on dit que l'onde est stationnaire.

### III.4. 6. Réflexion d'une onde électromagnétique par un gaz ionisé

Les plasmas sont caractérisés par une conductivité imaginaire pure:

$$\text{On a: } \sigma(\omega) = \frac{\varepsilon_0 \omega_p^2}{i\omega} \quad (\in \mathbb{C}) \quad (\text{III.170})$$

Alors quelle que soit la pulsation, le milieu se comporte de manière similaire à un conducteur parfait dans le domaine  $\omega \gg \frac{1}{\tau}$

On considère une onde se propageant dans le vide (d'indice=1) et arrivant sur un plasma, dont l'indice est n.

Les coefficients de réflexion et transmission en amplitude sont donc :

$$r = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} = \frac{1 - n}{1 + n} \quad (\text{III.171})$$

$$t = \frac{2n_1}{n_1 + n_2} = \frac{2}{1 + n} \quad (\text{III.172})$$

Où n est l'indice de réfraction du plasma:

$$n = \frac{c}{v_\phi} = \frac{ck}{\omega} \quad \text{soit } n = \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}} \quad (\text{III.173})$$

-Si  $\omega > \omega_p$ : Une partie de l'onde sera réfléchie, l'autre sera propagée sans atténuation

$$r = \frac{1 - \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}}{1 + \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}} \quad (\text{III.174})$$

$$t = \frac{2}{1 + \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}} \quad (\text{III.175})$$

- si  $\omega < \omega_p$  : Les calculs peuvent formellement s'appliquer avec un indice complexe

$$\text{imaginaire pur: } k = i \sqrt{\frac{\omega_p^2 - \omega^2}{c^2}} \quad \text{donc } n = \frac{ck}{\omega} = i \sqrt{\frac{\omega_p^2}{\omega^2} - 1} \quad (\text{III.176})$$

On a alors un coefficient de réflexion complexe mais dont le module est égale 1, ce qui signifie qu'il y a réflexion totale de l'onde sur le plasma dans ce cas.

En appliquant le même formalisme, on peut définir les coefficients de réflexion et transmission en énergie en calculant les vecteurs de Poynting, et on trouve de même :

$$\begin{cases} R = r^2 \\ T = 1 - R \end{cases} \quad (\text{III.177})$$

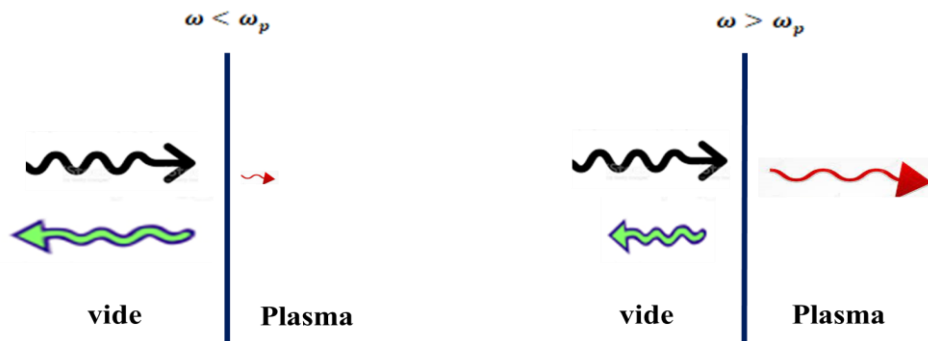


Figure III.8. Réflexion d'une onde électromagnétique par un gaz ionisé

### III.5. Ondes guidées:

#### III.5.1. Définition du guide d'onde:

Une guide d'onde est une portion d'espace remplie ou vide par un milieu isolant et limité par un conducteur supposé parfait. Il permet à conduire l'OEM dans cette portion de l'espace sans dispersion de son énergie.

Il existe un très grand nombre de guides d'ondes, les uns diélectriques, les autres métalliques. Sont invariants par translation dans une direction qui sera la direction de propagation de l'OEM.

Le milieu 1, dans lequel se propagent les ondes, est toujours un milieu isolant. Dans les guides d'ondes métalliques, ce milieu est limité par une interface isolant-conducteur (milieu 2, métallique) tandis que, dans les guides d'ondes isolants, ce milieu est limité par une interface isolant-isolant (milieu 2, isolant).

Les applications pratiques des ondes électromagnétique dans le domaine du radar ou des communications nécessitent un guidage des ondes, à la fois pour empêcher les interférences et pour canaliser l'énergie de façon à minimiser l'atténuation de l'onde.

Ce guidage est causé par la présence d'une structure diélectrique ou conductrice (ou une combinaison des deux) qui permet des modes de propagation privilégiés dans une direction.

Supposons que cette structure a une symétrie de translation dans la direction  $z$ . On prend par exemple un cylindre infini, fait entièrement de conducteur (comme un fil), de diélectrique entouré de conducteur, ou de diélectrique (comme une fibre optique), etc. le signal porté par un câble coaxial se propage dans le milieu diélectrique qui sépare le fil central de l'enveloppe conductrice.

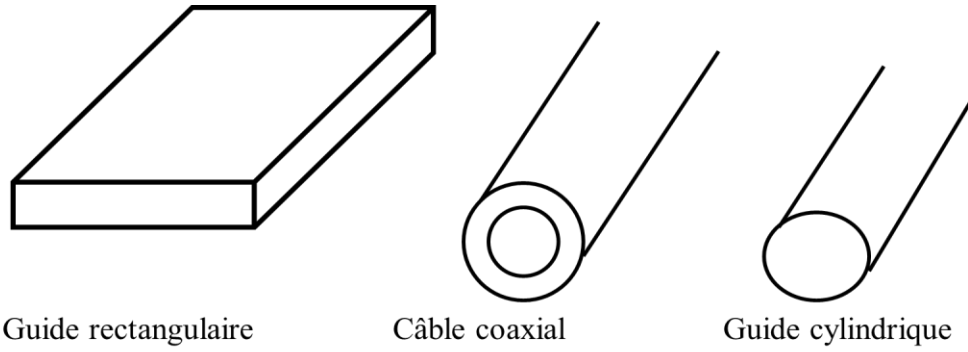


Figure III.9. Les types des guides ondes

### III.5.2. Solutions générales des ondes TEM, TE et TM

Les équations qui permettent d'exprimer les fréquences de coupure des différents modes proviennent des équations de Maxwell. Supposons que les champs électriques et magnétiques sont harmoniques dans le temps, et que la propagation se fait suivant l'axe  $z$ .

Pour ce faire, chacune des composantes du champ sera écrite sous la forme générique

$$\psi(x, y, z, t) = F(x, y) e^{i(\omega t - k_z z)} \quad (\text{III.178})$$

Si la région du guide d'onde est sans sources, les équations de Maxwell peuvent être écrites selon :

$$\nabla \times \vec{E} = -i\omega\mu\vec{H} \quad (\text{III.179})$$

$$\nabla \times \vec{H} = i\omega\varepsilon\vec{E} \quad (\text{III.180})$$

On peut résoudre ces équations pour obtenir les quatre composantes transversales en fonction des composantes longitudinales ( $E_x, E_y, H_x$  et  $H_y$  en fonction de  $E_z$  et  $H_z$ ) :

$$E_x = \frac{-j}{k_c^2} \left( \beta \frac{\partial E_z}{\partial x} + \omega\mu \frac{\partial H_z}{\partial y} \right) \quad (\text{III.181.a})$$

$$E_y = \frac{j}{k_c^2} \left( -\beta \frac{\partial E_z}{\partial y} + \omega\mu \frac{\partial H_z}{\partial x} \right) \quad (\text{III.181.b})$$

$$H_x = \frac{j}{k_c^2} \left( \omega\varepsilon \frac{\partial E_z}{\partial y} - \beta \frac{\partial H_z}{\partial x} \right) \quad (\text{III.181.c})$$

$$H_y = \frac{-j}{k_c^2} \left( \omega\varepsilon \frac{\partial E_z}{\partial x} + \beta \frac{\partial H_z}{\partial y} \right) \quad (\text{III.181.d})$$

$$\text{Le nombre d'onde de coupure est: } k_c^2 = k^2 - \beta^2 \quad (\text{III.182})$$

$$\text{Le nombre d'onde du matériau du guide d'onde : } k = \omega\sqrt{\mu\varepsilon} = \frac{2\pi}{\lambda} \quad (\text{III.183})$$

### III.5.2.1. Les modes de propagations

Les modes transversaux sont classés selon différents types :

#### a. Les modes de propagations TEM

Une onde TEM est caractérisée par  $E_z = H_z = 0$ . A partir des équations (III.181), il s'ensuit on obtient que tous les champs transversaux sont nuls, à moins que  $k_c^2 = 0$ , ce qui donne un résultat indéterminé.

On résout les équations de Maxwell pour obtenir :  $\beta = \omega\sqrt{\mu\epsilon} = k$ , ce qui signifie que  $k_c = 0$  pour les ondes TEM.

Une onde TEM peut seulement exister lorsque deux ou plusieurs conducteurs sont présents.

L'impédance de l'onde TEM est donnée par :

$$Z_{\text{TEM}} = \frac{E_x}{H_y} = -\frac{E_y}{H_x} = \frac{\omega\mu}{\beta} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} = \eta \quad (\text{III.184})$$

#### b. Les modes de propagations TE (transverse électrique)

Les modes TE ne présentent aucun champ électrique dans la direction de propagation.

Dans ce mode l'onde TE est caractérisée par  $E_z = 0$  et  $H_z \neq 0$ .

Dans ce cas,  $k_c \neq 0$  et  $\beta = \sqrt{k^2 - k_c^2}$  est fonction de la fréquence et de la géométrie du guide d'onde. L'impédance de l'onde TE est:

$$Z_{\text{TE}} = \frac{E_x}{H_y} = -\frac{E_y}{H_x} = \frac{k\eta}{\beta} \quad (\text{III.185})$$

#### c. Les modes de propagation TM

Une onde TM est caractérisée par  $H_z = 0$  et  $E_z \neq 0$ .

Dans ce cas,  $k_c \neq 0$  et  $\beta = \sqrt{k^2 - k_c^2}$  est fonction de la fréquence et de la géométrie du guide d'onde. L'impédance de l'onde TM est :

$$Z_{\text{TM}} = \frac{E_x}{H_y} = -\frac{E_y}{H_x} = \frac{\beta\eta}{k} \quad (\text{III.186})$$

#### d. Les modes hybrides:

Ont à la fois des composants électriques et magnétiques dans la direction de propagation.

### III.5.2.2. Atténuation due aux pertes diélectriques

L'atténuation dans un guide d'onde peut être causée par les pertes dans le diélectrique ( $\alpha_d$ ), Ou les pertes dans le conducteur ( $\alpha_c$ ). L'atténuation totale est donnée par la relation suivante :

$$\alpha = \alpha_c + \alpha_d \quad (\text{III.187})$$

L'atténuation causée par le conducteur dépend de la structure physique du guide, et doit donc être évaluée séparément pour chaque guide d'onde. Si le guide est rempli d'un diélectrique uniforme, l'atténuation due au diélectrique peut être calculée à partir de la constante de propagation.

La constante de propagation est calculée par:

$$\gamma = \alpha_d + j\beta = \sqrt{k_c^2 - k^2} \quad (\text{III.188})$$

$$\gamma = \sqrt{k_c^2 - \omega^2 \mu_0 \varepsilon_r \varepsilon_0 (1 - \tan \delta)} \quad (\text{III.189})$$

Avec ( $\varepsilon = \varepsilon_r \varepsilon_0 (1 - \tan \delta)$ ) est la constante diélectrique complexe.

En générale, les pertes diélectriques sont faibles, donc  $\tan \delta \ll 1$ , ce qui permet de simplifier:

$$\gamma = \frac{k^2 \tan \delta}{2\beta} + j\beta \quad (\text{III.190})$$

Où  $k^2 = \omega^2 \mu_0 \varepsilon_r \varepsilon_0$  est le nombre d'onde sans pertes.

Si les pertes sont faibles, la constante de phase  $\beta$  est la même, et l'atténuation est :

$$\alpha_d = \frac{k^2 \tan \delta}{2\beta} \quad [Np/m] \quad (\text{III.191})$$

pour les ondes TE, TM et ondes TEM:  $\beta = k$ , ce qui donne :

$$\alpha_d = \frac{k \tan \delta}{2} \quad [Np/m] \quad (\text{III.192})$$

### III.5.2.3. Fréquence de coupure

Les modes TE et TM se propagent à partir d'une certaine fréquence, dite fréquence de coupure  $f_c$ .

Une onde se propage seulement lorsque  $\beta$  est réel, qui se produit seulement lorsque  $k > k_c$ .

Le mode TEM ne possède pas de fréquence de coupure.

Normalement, dans un guide, on veut seulement un seul mode qui se propage. On peut donc déterminer les fréquences d'opération d'un guide en fonction des fréquences de coupure des modes supérieurs.



### III.5.3. Guide parallèle plan

Les plaques parallèles forment le guide d'onde le plus simple; elles peuvent supporter des modes de propagation TE, TM et TEM.

Ce guide est peu utilisé en pratique, mais il permet de modéliser des guides plus complexes.

La figure III.10 présente un exemple de plaques parallèles. Supposons que  $W \gg d$ .

**Pour le mode TEM**, l'impédance du milieu est donnée par :

$$Z_0 = \frac{\eta d}{W} \quad (\text{III.193})$$

où  $\eta = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}$  est l'impédance intrinsèque du milieu.

L'impédance est constante et ne dépend que du milieu. La vitesse de phase est aussi

$$\text{constante : } v_p = \frac{\omega}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} \quad (\text{III.194})$$

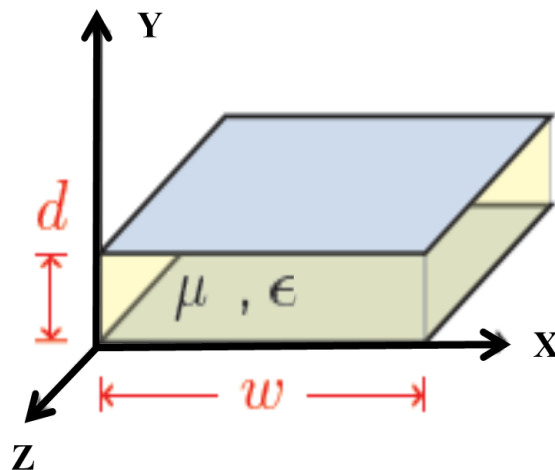


Figure III.10. Plaques parallèles

**Pour les deux mode TE et TM:** la fréquence de coupure du mode  $n$  est obtenue par la

$$\text{condition } k = k_c, \text{ ce qui donne : } f_{c_n} = \frac{k_c}{2\pi\sqrt{\mu\epsilon}} = \frac{n}{2d\sqrt{\mu\epsilon}} \quad (\text{III.195})$$

Le tableau III.1 contient les équations les plus utiles pour les plaques parallèles (Source: Pozar).

Paramètre	Mode TEM	Mode TE <sub>n</sub>	Mode TM <sub>n</sub>
K	$\omega\sqrt{\mu\epsilon}$	$\omega\sqrt{\mu\epsilon}$	$\omega\sqrt{\mu\epsilon}$
$k_c$	0	$n\pi/d$	$n\pi/d$
$\beta$	$\omega\sqrt{\mu\epsilon}$	$\sqrt{k^2 - k_c^2}$	$\sqrt{k^2 - k_c^2}$
$\lambda_c$	$\infty$	$2\pi/k_c = 2d/n$	$2\pi/k_c = 2d/n$
$\lambda_g$	$2\pi/k$	$2\pi/\beta$	$2\pi/\beta$
$\alpha_d$	$(k \tan \delta)/2$	$(k^2 \tan \delta)/2\beta$	$(k^2 \tan \delta)/2\beta$
$\alpha_c$	$R_s/\eta d$	$2k_c^2 R_s/k\beta\eta d$	$2kR_s/\beta\eta d$

Tableau III.1 Équations les plus utiles pour les plaques parallèles.

La figure III.11 présente atténuation due au conducteur pour les modes TEM, TM<sub>1</sub> et TE<sub>1</sub>.

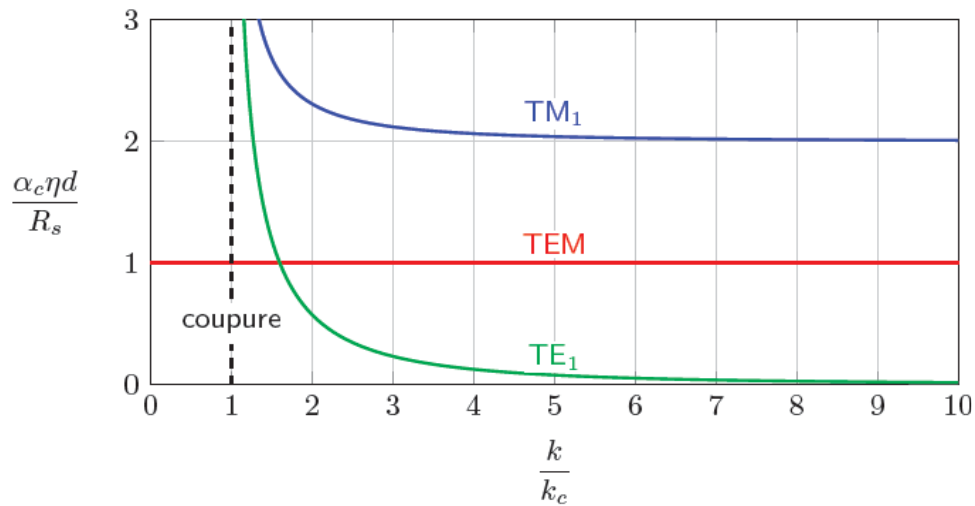


Figure III.11. Atténuation due au conducteur pour les modes TEM, TE<sub>1</sub> et TM<sub>1</sub> pour les plaques parallèles.

On remarque que l'atténuation tend vers l'infini au fur et à mesure que l'on s'approche de la fréquence de coupure.

### III.5.4. Guide rectangulaire

Le guide rectangulaire est un guide ayant un seul conducteur, et donc il ne peut pas supporter de mode TEM. Les modes TE et TM ayant des fréquences de coupure, ce type de guide a une fréquence minimale d'opération.

Nous avons présenté dans la figure III.12 un exemple de guide rectangulaire. On suppose que le guide est rempli d'un diélectrique ayant une perméabilité  $\mu$  et une permittivité  $\epsilon$ . Par convention, le côté le plus long du guide est sur l'axe  $x$ , ce qui donne  $a > b$ , avec  $a$  et  $b$  sont les cotés

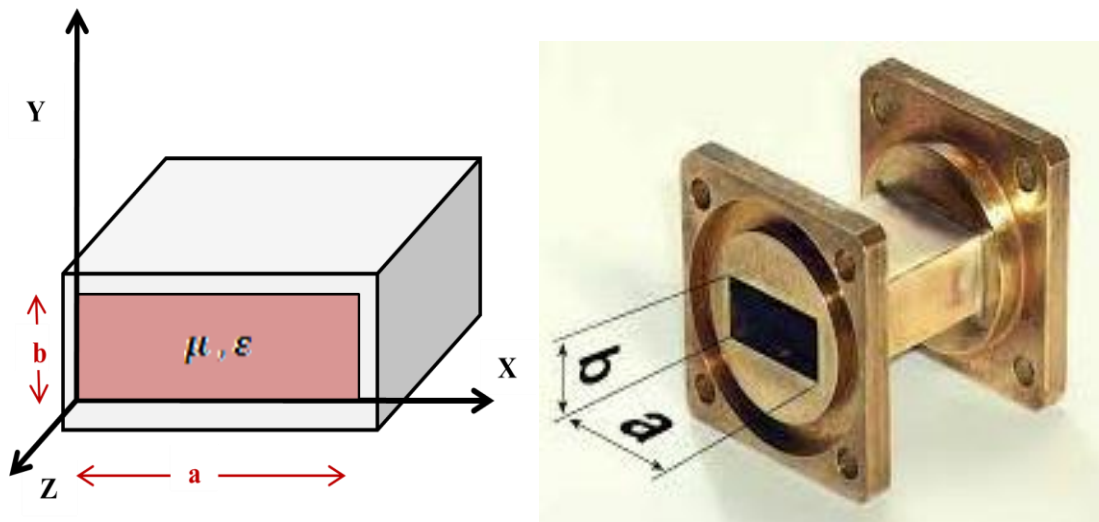


Figure III.12. Guide rectangulaire

**Pour le mode TE**, la constante de propagation est donnée par:

$$\beta = \sqrt{k^2 - k_c^2} = \sqrt{k^2 - \left(\frac{m\pi^2}{a}\right)^2 - \left(\frac{n\pi^2}{b}\right)^2} \quad (\text{III.196})$$

Si  $k > k_c$  la constante de propagation est réelle, et alors la fréquence de coupure est égale à:

$$f_{c_{mn}} = \frac{k_c}{2\pi\sqrt{\mu\epsilon}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{\mu\epsilon}} \sqrt{\left(\frac{m\pi^2}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi^2}{b}\right)^2} \quad (\text{III.197})$$

**Le mode dominant** est le mode ayant la fréquence de coupure la plus basse.

Puisque  $a > b$ , le mode dominant est  $TE_{10}$  ( $m = 1, n = 0$ ):

$$f_{c_{10}} = \frac{1}{2a\sqrt{\mu\epsilon}} \quad (\text{III.198})$$

Nous pouvons noter que:

- Le mode TE<sub>00</sub> n'existe pas.
- Seulement les modes ayant ( $f_c < f$ ) vont se propager
- Modes évanescentes sont des modes ayant ( $f_c > f$ ) seront fortement atténués .

**Définition:**

Une onde évanescente est une onde plane dont l'amplitude diminue exponentiellement avec la distance à la source.

D'une manière générale, on veut qu'il n'y ait qu'un seul mode en propagation dans le guide, soit le mode TE<sub>10</sub>. Choisissons donc les dimensions du guide, suivant la fréquence d'opération, pour avoir seulement ce mode.

L'atténuation due au conducteur pour le mode TE<sub>10</sub> est :

$$\alpha_c = \frac{R_s}{a^3 b \beta k \eta} (2b\pi^2 + a^3 k^2) \quad [Np/m] \quad \text{(III.199)}$$

**Le Mode TM** possède la même constante de propagation et la même fréquence de coupure que le mode TE. Cependant, les modes TM<sub>00</sub>, TM<sub>10</sub> et TM<sub>01</sub> n'existent pas. Le plus bas mode TM qui se propage est TM<sub>11</sub>.

Le tableau III.2 présente les équations principales du guide rectangulaire (Source : Pozar).

Paramètre	Modes : <b>TM<sub>mn</sub></b> et <b>TE<sub>mn</sub></b>
K	$\omega\sqrt{\mu\epsilon}$
$k_c$	$\sqrt{(m\pi/a)^2 + (n\pi/b)^2}$
$\beta$	$\sqrt{k^2 - k_c^2}$
$\lambda_c$	$2\pi/k_c$
$\lambda_g$	$2\pi/\beta$
$\alpha_d$	$(k^2 \tan \delta)/2\beta$

Tableau III.2. Équations principales du guide rectangulaire

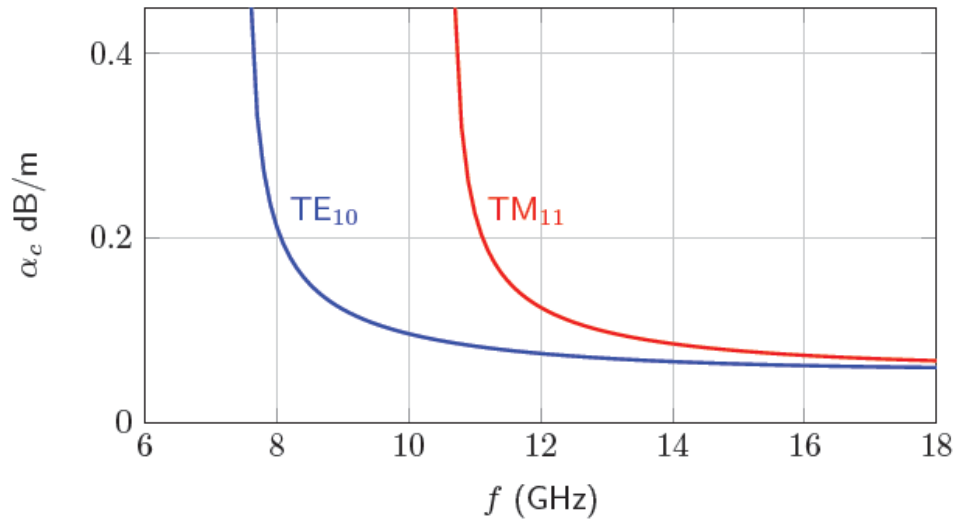


Figure III.13. Guide rectangulaire : Atténuation(exemple :  $a=b=2$ , en cuivre).

### III.5.5. Guide circulaire (creux) :

Le guide d'ondes circulaire est un cylindre métallique, creux, de rayon  $a$ . Il est représenté dans le système de coordonnées de cylindriques sur la (figure III.14) ou l'axe  $z$  est toujours défini comme étant la direction de propagation.

Le mode de fonctionnement est similaire au guide rectangulaire. Cependant, difficile à assurer la rigidité d'une telle structure.

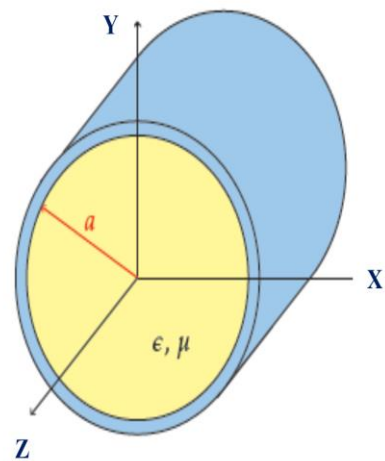


FIGURE 2.4 – Guide circulaire

Figure III.14. Guide circulaire

Pour le mode TE, la constante de propagation est donnée par:

$$\beta = \sqrt{k^2 - \left(\frac{p'_{nm}}{a}\right)^2} \quad (\text{III.200})$$

Où  $p'_{nm}$  est la  $m^{\text{ième}}$  racine de la dérivée des fonctions de Bessel,  $J'_n$ .

Le tableau III.3 montre quelques valeurs de  $p'_{nm}$ .

N	$P'_{n1}$	$P'_{n2}$	$P'_{n3}$
0	3.832	7.016	10.174
1	1.841	5.331	8.536
2	3.054	6.706	9.970
3	4.201	8.015	11.346
4	5.318	9.282	12.682

Tableau III.3. Valeurs de  $p'_{nm}$  pour le mode TE d'un guide circulaire

Alors la fréquence de coupure est:

$$f_{c_{mn}} = \frac{k_c}{2\pi\sqrt{\mu\epsilon}} = \frac{p'_{nm}}{2\pi a\sqrt{\mu\epsilon}} \quad (\text{III.201})$$

Le premier mode à se propager dans un guide circulaire est celui qui a  $p'_{nm}$  le plus petit.

D'après le tableau III.3 et l'équation (III.202), le premier mode TE à se propager est donc

TE<sub>11</sub>. Puisque  $m \geq 1$  le mode TE<sub>01</sub> existe mais le mode TE<sub>10</sub> n'existe pas.

L'atténuation pour le mode TE<sub>11</sub> est :

$$\alpha_c = \frac{R_s}{ak\beta\eta} \left( k_c^2 + \frac{k^2}{p'^2_{11} - 1} \right) \quad [\text{Np/m}] \quad (\text{III.202})$$

Pour le mode TM les équations ressemblent à celle du mode TE. La constante de propagation est défini par:

$$\beta = \sqrt{k^2 - \left(\frac{p_{nm}}{a}\right)^2} \quad (\text{III.203})$$

Avec  $p_{nm}$  est la  $m^{\text{ième}}$  racine des fonctions de Bessel,  $J_n$ .

Le tableau III.4 présente quelques valeurs de  $p_{nm}$ .

N	$P_{n1}$	$P_{n2}$	$P_{n3}$
0	2.405	5.520	8.654
1	3.832	7.016	10.174
2	5.135	8.417	11.620

Tableau III.4. Valeurs de  $p_{nm}$  pour le mode TM d'un guide circulaire

La fréquence de coupure est donnée par:

$$f_{c_{mn}} = \frac{k_c}{2\pi\sqrt{\mu\epsilon}} = \frac{p_{nm}}{2\pi a\sqrt{\mu\epsilon}} \tag{III.204}$$

Selon le tableau III.4, le premier mode à se propager est  $TM_{01}$ . Cette valeur est plus grande que le plus petit  $p'_{nm}$ , et donc  $TE_{11}$  est le mode dominant du guide circulaire. Il n'y a pas de mode  $TM_{10}$ .

Le tableau III.5 résume les équations principales du guide rectangulaire (Source : Pozar).

Paramètre	Mode $TM_{mn}$	Mode $TE_{mn}$
K		$\omega\sqrt{\mu\epsilon}$
$k_c$	$p_{nm}/a$	$p'_{nm}/a$
$\beta$		$\sqrt{k^2 - k_c^2}$
$\lambda_c$		$2\pi/k_c$
$\lambda_g$		$2\pi/\beta$
$\alpha_d$		$(k^2 \tan \delta)/2\beta$

Tableau III.5 Equations principales du guide rectangulaire

La figure III.15 présente les fréquences de coupure des premiers modes TM et TE d'un guide circulaire, par rapport à la fréquence de coupure du mode dominant TE<sub>11</sub>.

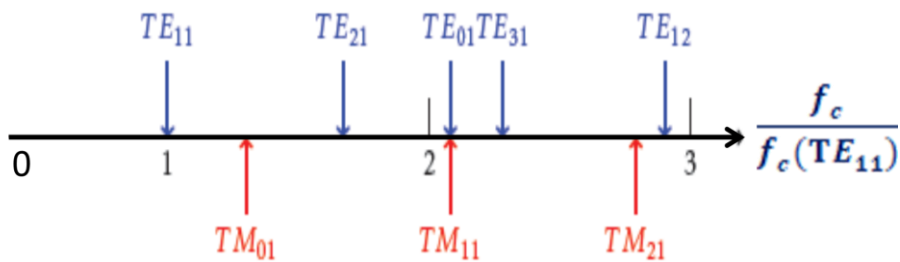


Figure III.15. Fréquence de coupure des premiers modes TM et TE d'in guide circulaire

### III.5.6. Câble coaxial

Le câble coaxial est un autre type de guide d'ondes, est très utilisé en industrie. Il est constitué de deux conducteurs cylindriques séparés par un diélectrique, Typiquement, conducteur central contient le signal, et le conducteur externe sert de mise à terre (voir la figure III.16).

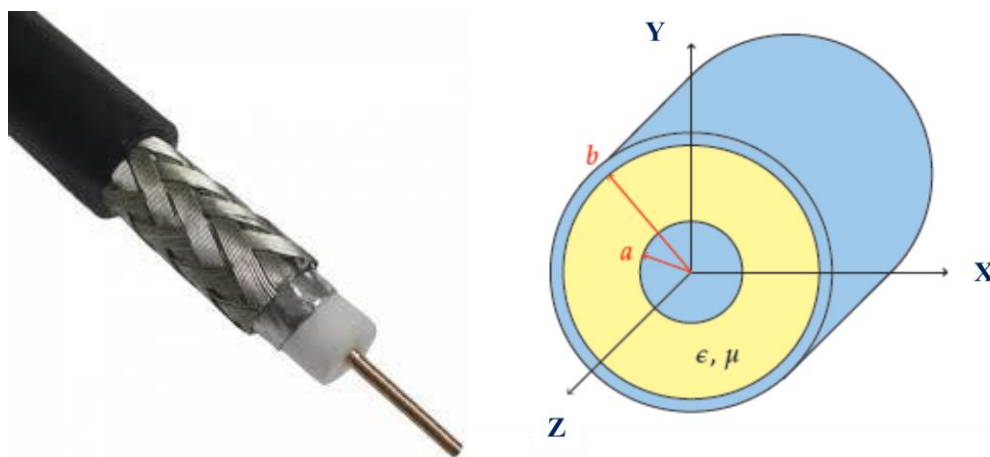


Figure .III.16. Câble coaxial

Puisque le câble coaxial contient deux conducteurs, il peut supporter un mode TEM.

Son atténuation est :

$$\alpha_c = \frac{1}{2} \left[ \frac{R_s}{\eta \ln(b/a)} \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) \right] \tag{III.205}$$



- Les modes TE et TM sont habituellement évanescents à la fréquence d'utilisation du guide.
- Pour éviter la superposition des modes (c'est à dire la distorsion dans le signal transmis sur le câble) , il faut connaître la fréquence de coupure des modes supérieurs.

**Remarque :**

Le mode TE<sub>11</sub> se propage sur un câble coaxial après le mode TEM .Sa fréquence de coupure est égale à:

$$f_c = \frac{ck_c}{2\pi\sqrt{\epsilon_r}} \quad \text{(III.206)}$$

$$\text{Avec: } k_c \approx \frac{2}{a+b} \quad \text{(III.207)}$$

## CHAPITRE IV

### Rayonnement d'ondes électromagnétiques



*Joseph Larmor*

Né le 11 Juillet 1857 en Irlande ( mort en 1942), Joseph Larmor est un physicien dont les recherches ont permis des avancées en électromagnétisme, en mécanique quantique et connu notamment pour ses travaux sur les électrons.

Joseph Larmor fut un des premiers à écrire les transformées de Lorentz, avant ce dernier, transformées fondamentales utilisées notamment dans la théorie de la relativité restreinte d'Albert Einstein.

Ses travaux sur le calcul de l'énergie émise par un électron en accélération donnèrent la formule de Larmor. Larmor caractérisa avec le rayon de Larmor, la trajectoire circulaire d'une particule chargée dans un champ magnétique et étudia également la précession du moment magnétique des électrons. Tous ces travaux sur les électrons ont permis d'expliquer les raies spectrales observées lors d'oscillation d'électrons dans un champ magnétique. Il proposa aussi un modèle pour expliquer pourquoi il existe un champ magnétique terrestre.

**IV.1.Introduction :**

Une onde électromagnétique est composée d'un champ électrique et un champ magnétique oscillant à la même fréquence.

Le champ électrique varie en grandeur et est orienté de façon perpendiculaire à la direction de propagation du rayonnement.

Le champ magnétique est orienté de façon perpendiculaire au champ électrique

La propagation de ces ondes s'effectue à une vitesse qui dépend du milieu considéré. Dans le vide, la vitesse de propagation est égale à  $3.10^8$  m.s<sup>-1</sup>.

Les rayonnements électromagnétique sont présentés sous de plusieurs formes : rayons X, rayons gamma, lumière ultraviolette, lumière visible, lumière infrarouge etc.....La différence entre eux se situe dans la fréquence de l'onde électromagnétique et l'énergie qui y est liée.

**IV.2. Rayonnement d'un dipôle électrique oscillant :**

En électromagnétisme, Le dipôle électrique oscillant décrit les effets du mouvement oscillatoire d'une particule chargée aux alentours d'un point fixe. Il explique des phénomènes tels que le fonctionnement des antennes dipolaires ou le rayonnement thermique et la diffusion Rayleigh.

Considérons une charge +q fixe à un point O et une charge -q mobile selon l'axe Oz qui suit un mouvement sinusoïdal :

$$z = z_0 \cos \omega t = z_0 e^{-i\omega t} \quad (\text{IV.1})$$

On suppose le mouvement de +q non relativiste ; ainsi ,  $z_0 \omega \ll c$  et  $z_0 \ll \lambda$

**IV.2.1. Le potentiel :**

$$\text{On a: } \vec{j} = (-q)\vec{v} \Rightarrow \vec{A}(M, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[ \frac{-q\vec{v}}{r} \right]_{t-\frac{r}{c}} \quad (\text{IV.2})$$

$$\text{Avec: } \vec{v} = i \omega z(t) \vec{e}_z \quad (\text{IV.3})$$

$$\text{Et: } k = \omega/c \quad (\text{IV.4})$$

$$\text{Ainsi: } \vec{A}(M, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} i\omega \vec{P}(t) \frac{e^{-ikr}}{r} \quad (\text{IV.5})$$

$$\text{Le moment dipolaire est: } \vec{P}(t) = (-q)z(t)\vec{e}_z \quad (\text{IV.6})$$

Calculons ensuite le potentiel scalaire avec:

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial V}{\partial t} = \frac{i\omega}{c^2} \vec{V} = -\text{div}(\vec{A}) = -\vec{\nabla} \cdot \vec{A} \Rightarrow \vec{V} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} p_0 \cos \theta \frac{1+ikr}{r^2} e^{-ikr} \quad (\text{IV.7})$$

### IV.2. 2. Le champ :

Nous sommes toujours en coordonnées sphériques de base  $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi)$  :

Le champ magnétique  $\vec{B}$  est donné par la relation :

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} i\omega \frac{p_0 e^{-ikr}}{r^2} (1 + ikr) \sin\theta \vec{e}_\varphi \quad (\text{IV.8})$$

Le champ électrique  $\vec{E}$  est donné par la relation :

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p_0 e^{-ikr}}{r^3} (2 \cos\theta(1 + ikr) \vec{e}_r + \sin\theta(1 + ikr - k^2 r^2) \vec{e}_\theta) \quad (\text{IV.9})$$

Supposons que l'on calcule les champs à grande distance» c'est-à-dire pour  $r \gg \lambda$  ce qui s'écrit ainsi aussi  $kr \gg 1$  .

L'expression des champs se simplifie alors selon:

$$\vec{E} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} p_0 k^2 \frac{e^{-ikr}}{r} \sin\theta \vec{e}_\theta \quad (\text{IV.10})$$

$$\vec{B} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} p_0 k^2 \frac{e^{-ikr}}{r} \frac{\sin\theta}{c} \vec{e}_\varphi \quad (\text{IV.11})$$

### IV.2. 3. La structure de l'onde :

On voit que le trièdre  $(\vec{E}, \vec{B}, \vec{k})$  est direct avec ici  $k$  radial, et que  $|\vec{B}| = \frac{|\vec{E}|}{c}$

On a donc une onde progressive mais elle n'est pas isotrope car l'amplitude varie en  $\frac{\sin\theta}{r}$

On peut dire qu'on a une structure *locale* d'onde plane progressive monochromatique polarisée rectilignement; l'onde étant en réalité une onde sphérique d'émission anisotrope

- Si  $\theta = 0$  : il n'y a pas d'onde dans la direction du mouvement de la charge.

-Si  $\theta = \frac{\pi}{2}$  : l'amplitude est maximale dans une direction perpendiculaire au mouvement de la charge.

-La polarisation obtenue étant dans la direction du mouvement de la charge, on peut obtenir une polarisation autre que rectiligne en superposant deux mouvement de charge ou avec une charge ayant un mouvement autre que rectiligne.

### IV.2. 4. La puissance rayonnée à travers une sphère de rayon $r$ :

Le vecteur de Poynting  $\vec{\Pi}$  associé au champ rayonné est :

$$\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} = \frac{\vec{E}^2}{\mu_0 c} \vec{e}_r = \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\right)^2 \left(\frac{p_0 k^2 \sin\theta}{r}\right)^2 \frac{\cos^2(\omega t - kr)}{\mu_0 c} \vec{e}_r \quad (\text{IV.12})$$

$$\text{La valeur moyenne est : } \langle \vec{\Pi} \rangle_{\text{temps}} = \frac{p_0^2 k^4 \sin^2 \theta}{32 \pi^2 \epsilon_0^2 \mu_0 c r^2} \vec{e}_r \quad (\text{IV.13})$$

On note que le vecteur de Poynting est radial et toujours dirigé vers l'extérieur : le système de charge en mouvement rayonne de l'énergie.

$$P_{\text{rayonnée}} = \oint \langle \vec{\Pi} \rangle \cdot d\vec{S} = \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} \int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} \langle \vec{\Pi} \rangle r^2 \sin \theta d\theta d\varphi \vec{e}_r \quad (\text{IV.14})$$

Ce qui donne, tout calcul fait :

$$P_{\text{rayonnée}} = \frac{p_0^2 \omega^4}{12 \pi \epsilon_0 c^3} \quad (\text{IV.15})$$

-On obtient bien une puissance indépendante de  $r$ , ce qui traduit la conservation de l'énergie (on a négligé tout phénomène d'absorption)

-Et aussi la puissance rayonnée est donnée par la **formule de Larmor** suivante :

$$P_{\text{rayonnée}} = \frac{\langle \dot{p}(t)^2 \rangle}{6 \pi \epsilon_0 c^3} \quad (\text{IV.16})$$

On note que cette formule est valable pour un mouvement autre que sinusoïdal.

La formule de formule de Larmor traduit le fait que toute particule accélérée rayonne de l'énergie.

#### IV.2. 5. Interprétation microscopique de rayonnement dipolaire :

Considérons le cas d'un dipôle constitué d'un électron et du reste de l'atome.

L'électron étant mobile, l'atome a bien un moment dipolaire donc rayonne de l'énergie si ce moment dipolaire dépend du temps. Si supposons que l'atome a été excité et qu'il ne reçoit plus d'énergie de la part de son milieu extérieur, son énergie totale devrait diminuer : c'est appelé « l'effondrement atomique ».

Pour le décrire On suppose que l'électron subit une force de frottement fluide et une force de rappel élastique. Le moment dipolaire étant proportionnel au déplacement de l'électron, alors :

$$p + 2\beta p + \omega_0^2 p = 0 \quad (\text{IV.17})$$

$\omega_0$  et  $\beta$  sont la pulsation caractéristiques de résonance de l'atome et le coefficient de frottement respectivement

L'électron fait un grand nombre de tours autour du noyau avant que la distance à celui-ci diminue significativement, supposons que l'électron est faiblement amorti sur l'échelle de temps d'une période si bien que  $\beta \ll \omega_0$  :

La solution de l'équation différentielle:

Le discriminant  $\Delta$  :

$$\Delta = 4\beta^2 - 4\omega_0^2 = 4(\beta^2 - \omega_0^2) \approx -4\omega_0^2 = (2i\omega_0)^2 \quad (\text{IV.18})$$

$$\text{Alors les racines de l'équation caractéristique sont: } u = -\beta \pm i\omega_0 \quad (\text{IV.19})$$

Avec la forme générale du moment dipolaire:

$$p(t) = e^{-\beta t}(A \cos \omega_0 t + B \sin \omega_0 t) \quad (\text{IV.20})$$

$$\text{Qui s'écrit, compte tenu de la condition initiale: } p(t) = p_0 e^{-\beta t}(A \cos \omega_0 t) \quad (\text{IV.21})$$

$$\text{Le déplacement de l'électron possède la même forme : } p = -e r \Rightarrow |r| = \frac{p(t)}{e} \quad (\text{IV.22})$$

Pour mettre en évidence l'effondrement atomique, il faut calculer l'énergie atomique (énergie mécanique: cinétique et potentielle) :

$$\text{L'énergie cinétique: } E_c = \frac{1}{2} m |r|^2 = \frac{m}{2e^2} p^2 \approx \frac{m\omega_0^2}{2e^2} p_0^2 e^{-2\beta t} \sin^2 \omega_0 t \quad (\text{IV.23})$$

On a utilisé les approximations suivantes( parce que  $\beta \ll \omega_0$ ):

$$p = -\beta p_0 e^{-\beta t} \cos \omega_0 t - \omega_0 p_0 e^{-\beta t} \sin \omega_0 t \approx -\omega_0 p_0 e^{-\beta t} \sin \omega_0 t \quad (\text{IV.24})$$

$$\text{L'énergie potentielle : } E_p = \frac{1}{2} m \omega_0^2 r^2 = \frac{m\omega_0^2}{2e^2} p^2 = \frac{m\omega_0^2}{2e^2} p_0^2 e^{-2\beta t} \cos^2 \omega_0 t \quad (\text{IV.25})$$

Alors l'énergie mécanique est:

$$E_M = E_c + E_p = \frac{m\omega_0^2}{2e^2} p_0^2 e^{-2\beta t} (\cos^2 \omega_0 t + \sin^2 \omega_0 t) \quad (\text{IV.26})$$

$$E_M = \frac{m\omega_0^2}{2e^2} p_0^2 e^{-2\beta t} \quad (\text{IV.27})$$

L'énergie perdue par l'atome est due à la puissance rayonnée, alors :

$$\frac{dE_M}{dt} = -P_{\text{rayonnée}} \Rightarrow \frac{dE_M}{dt} = -\frac{\langle p(t)^2 \rangle}{6\pi \epsilon_0 c^3} \quad (\text{IV.28})$$

$$\text{Et } P(t) \approx -\omega_0 p_0 e^{-\beta t} \sin \omega_0 t \quad (\text{IV.29})$$

$$\text{Alors : } \ddot{p}(t) \approx -\omega_0 p_0 (-\beta e^{-\beta t} \sin \omega_0 t + \omega_0 e^{-\beta t} \cos \omega_0 t) \quad (\text{IV.30})$$

$$\ddot{p}(t) \approx -\omega_0^2 p_0 e^{-\beta t} \cos \omega_0 t \quad (\text{IV.31})$$

$$\text{Donc : } \ddot{p}(t)^2 \approx \omega_0^4 p_0^2 e^{-2\beta t} \cos^2 \omega_0 t \quad (\text{IV.32})$$

$$\text{Et } \langle \ddot{p}(t)^2 \rangle = \frac{\omega_0^4 p_0^2 e^{-2\beta t}}{2} \quad (\text{IV.33})$$

On fait ici la moyenne sur l'échelle de temps de la période de rotation de l'électron autour du noyau  $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$ , période qui est faible par rapport au temps caractéristique d'amortissement  $\frac{1}{2\beta}$  d'où la présence de l'exponentielle dans le résultat.

$$\text{Alors : } \frac{dE_M}{dt} = -\frac{\omega_0^4}{12\pi\epsilon_0 c^3} p_0^2 e^{-2\beta t} \quad (\text{IV.34})$$

$$\text{Avec : } \frac{dE_M}{dt} = -\beta \frac{m \omega_0^2}{e^2} p_0^2 e^{-2\beta t} \quad (\text{IV.35})$$

Donc le coefficient de forttement qui modélise l'énergie perdue par l'atome est donnée par :

$$\beta = \frac{\omega_0^2 e^2}{12\pi m \epsilon_0 c^3} = \frac{\mu_0 \omega_0^2 e^2}{12\pi m c} \quad (\text{IV.36})$$

On suppose que l'atome est excité (le modèle de l'électron élastiquement lié), la solution de l'équation différentielle est:  $p = p_0 e^{i\omega t}$

$$\text{Et: } p_0 = \frac{e^2 E_0}{m (\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\beta\omega)} \quad (\text{IV.37})$$

$E_0$  et  $\omega$  sont l'amplitude du champ d'excitation et la pulsation respectivement.

Le module du moment dipolaire (dépend de la fréquence) est donné par :

$$p_0 = \frac{e^2 E_0}{m \sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2}} \quad (\text{IV.38})$$

Alors la puissance rayonnée par le dipôle étudié plus haut est en fait :

$$P_{\text{rayonnée}} = \frac{p_0^2 \omega^4}{12 \pi \epsilon_0 c^3} = \frac{e^4 E_0^2 \omega^4}{12 m^2 \pi \epsilon_0 c^3 ((\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2)} \quad (\text{IV.39})$$

### Remarque :

Pour les fréquences des ondes électromagnétiques visibles (celles émises par le soleil) on a aussi  $\omega \ll \omega_0$ , si bien qu'à ces fréquences, le module du moment dipolaire est constant, ce qui justifie l'explication de la couleur bleue du ciel, citée plus haut.

On pourrait voir le problème à l'envers: le ciel est bleu !!! C'est-à-dire, il y'a beaucoup plus de puissance émise pour les grandes fréquences ou les faibles longueurs d'ondes, ce qui prouve expérimentalement que  $\omega \ll \omega_0$  (dans le cas contraire, la puissance rayonnée aurait la même valeur pour toute fréquence, et le ciel serait blanc !!!).

Alors le vecteur de Poynting moyen de l'onde excitant l'atome est :

$$\langle |\vec{\Pi}| \rangle = \epsilon_0 c \frac{E_0^2}{2} \quad (\text{IV.40})$$

Alors la puissance surfacique d'excitation (flux de ce vecteur de Poynting à travers une surface unité) est :

$$P_0 = \varepsilon_0 c \frac{E_0^2}{2} \quad (\text{IV.41})$$

La section efficace totale de diffusion de rayonnement  $\sigma$  est donnée par :  $P_{\text{rayonnée}} = P_0 \sigma$

$$\text{Alors : } \sigma = \frac{P_{\text{rayonnée}}}{P_0} = \frac{2}{\varepsilon_0 c E_0^2} = \frac{e^4 E_0^2 \omega^4}{12 m^2 \pi \varepsilon_0 c^3 ((\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2)} \quad (\text{IV.42})$$

$$\sigma = \frac{e^4 \omega^4}{6 m^2 \pi \varepsilon_0^2 c^4 ((\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2)} \quad (\text{IV.43})$$

Pour  $\omega = \omega_0$ : cette section est maximale: c'est la **résonance**.

On distingue deux cas limites:

$\omega \ll \omega_0$ : **La diffusion Rayleigh**: ce cas explique la couleur bleue du ciel

$$\sigma = \frac{e^4}{6 m^2 \pi \varepsilon_0^2 c^4} \left( \frac{\omega}{\omega_0} \right)^4 \quad (\text{IV.44})$$

$\omega \gg \omega_0$ : **Diffusion Thomson**

$$\sigma = \frac{e^4}{6 m^2 \pi \varepsilon_0^2 c^4} \quad (\text{IV.45})$$

Nous pouvons alors tracer les variations de cette puissance moyenne en fonction de la pulsation  $\omega$  de l'onde incidente.

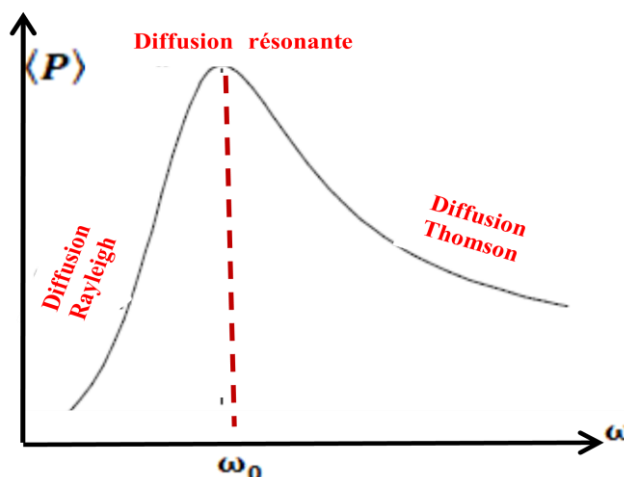


Figure IV.1. Variation de la puissance moyenne en fonction de la pulsation  $\omega$  de l'onde incidente



### IV.3 .Rayonnement d'une antenne, alignement d'antennes:

#### IV.3.1.Définition:

L'antenne dipolaire, Inventée par Heinrich Rudolph Hertz vers 1886, celle-ci est constituée de deux brins métalliques, alimentée en son milieu et conçue pour transmettre ou recevoir de l'énergie électromagnétique.

L'antenne dipolaire est le plus simple à étudier d'un point de vue analytique.

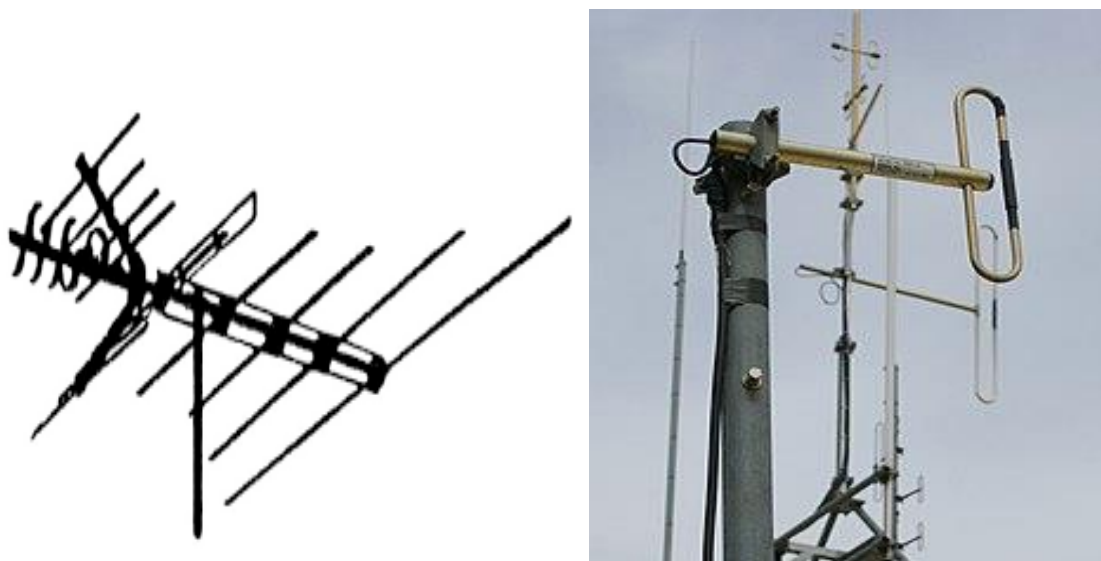


Figure IV.2. Antennes

#### IV.3. 2. Dipôle court, Dipôle demi-onde :

Considérons ici un fil parcouru par un courant, et cherchons le champ électromagnétique rayonné à grande distance. si  $l$  est la longueur du fil, on se placera comme pour le rayonnement d'un dipôle à une distance  $r \gg l$ . Il y'a deux cas :

-La longueur  $l$  est faible devant la longueur d'onde: « le cas de l'antenne dans l'approximation des régimes quasi-stationnaire : Dipôle court »

-La longueur  $l$  n'est pas négligeable devant la longueur d'onde « le cas particulier l'antenne demi-onde »

#### a-Dipôle court :

Un dipôle est formé par deux conducteurs de longueur totale  $l$  très petite comparée à la longueur d'onde  $\lambda$ . Les deux conducteurs sont alimentés au centre du dipôle.

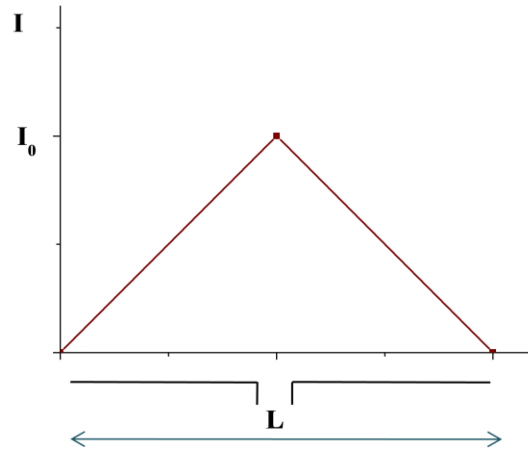


Figure IV.3. Courte antenne triangulaire servant de dipôle court.

La formule des potentiels est:

$$\vec{A}(M, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{\text{distribution}} \frac{i(S, t-r/c)}{r} d\tau \quad (\text{IV.46})$$

$$\text{Donc: } \vec{A}(M, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} I_0 l \frac{e^{i(\omega t - kr)}}{r} \vec{e}_z \quad (\text{IV.47})$$

Comme on avait pour le dipôle oscillant:

$$\vec{A}(M, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} i\omega p(t) \frac{e^{-ikr}}{r} = \frac{\mu_0}{4\pi} i\omega p_0(t) \frac{e^{i(\omega t - kr)}}{r} \quad (\text{IV.48})$$

On remplace  $i\omega p_0$  par  $I_0 l$  pour passer de résultats du dipôle à ceux de l'antenne. On revient donc à ce qu'on a obtenu dans « rayonnement du dipôle électrique oscillant » pour trouver les champs:

$$\begin{cases} \vec{E}_{\text{dipôle}} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} p_0 k^2 \frac{e^{-ikr}}{r} \sin\theta \vec{e}_\theta = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} p_0 \frac{k^2 \sin\theta}{r} e^{i(\omega t - kr)} \vec{e}_\theta \\ \vec{B}_{\text{dipôle}} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} p_0 k^2 \frac{e^{-ikr}}{r} \frac{\sin\theta}{c} \vec{e}_\varphi = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} p_0 \frac{k^2 \sin\theta}{rc} e^{i(\omega t - kr)} \vec{e}_\varphi \end{cases} \quad (\text{IV.49})$$

Alors:

$$\begin{cases} \vec{E} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} p_0 \frac{k^2 \sin\theta}{r} e^{i(\omega t - kr)} \vec{e}_\theta = -i \frac{\mu_0 \omega}{4\pi} I_0 l \frac{\sin\theta}{r} e^{i(\omega t - kr)} \vec{e}_\theta \\ \vec{B} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} p_0 \frac{k^2 \sin\theta}{rc} e^{i(\omega t - kr)} \vec{e}_\varphi = -\frac{\mu_0 \omega}{4\pi c} I_0 l \frac{\sin\theta}{r} e^{i(\omega t - kr)} \vec{e}_\varphi \end{cases} \quad (\text{IV.50})$$

Car:  $k = \frac{\omega}{c}$  et  $\epsilon_0 \mu_0 c^2 = 1$

Avec  $I_0$  est l'amplitude du courant sinusoïdal parcourant l'antenne

**Remarque:**

$i$  est comme d'habitude tel que  $i^2 = -1$ ; cette notation, employant des nombres complexes est la même utilisée quand on travaille avec le formalisme des impédances.

La structure de l'onde est comme le dipôle, localement plane à grande distance, et l'amplitude est nulle dans l'alignement de l'antenne, et maximale dans une direction perpendiculaire à l'antenne.

L'expression des champs en utilisant la longueur d'onde :

$$\text{On a: } \omega = \frac{2\pi c}{\lambda}$$

$$\text{Alors : } \begin{cases} \vec{E} = -i \frac{\mu_0 \omega}{4\pi} I_0 l \frac{\sin \theta}{r} e^{i(\omega t - kr)} \vec{e}_\theta = -i \frac{\mu_0 c}{2\lambda} I_0 l \frac{\sin \theta}{r} e^{i(\omega t - kr)} \vec{e}_\theta \\ \vec{B} = -\frac{\mu_0 \omega}{4\pi c} I_0 l \frac{\sin \theta}{r} e^{i(\omega t - kr)} \vec{e}_\varphi = -\frac{\mu_0}{2\lambda} I_0 l \frac{\sin \theta}{r} e^{i(\omega t - kr)} \vec{e}_\varphi \end{cases} \quad (\text{IV.51})$$

L'impédance caractéristique d'un milieu est donnée par:  $Z = \frac{|\vec{E}|}{|\vec{H}|}$

L'impédance caractéristique du vide est:

$$Z_0 = \mu_0 \frac{|\vec{E}|}{|\vec{B}|} = \mu_0 c = \frac{\mu_0}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = 377 \Omega \quad (\text{IV.52})$$

On pourrait calculer le vecteur de Poynting ainsi que pour son flux à travers une sphère de rayon  $r$  et on obtiendrait comme pour le dipôle une puissance constante, puisque le milieu de propagation (ici le vide) est non absorbant.

Une autre méthode pour faire le bilan énergétique consiste à calculer l'énergie perdue par l'antenne pendant l'instant  $dt$  en cherchant quelle est l'énergie localisée entre les sphères de rayon  $r$  et  $r + dr$  :

$$dE = e d\tau$$

$$\text{Avec } d\tau = 2\pi r^2 \sin \theta d\theta dr \quad (\text{IV.53})$$

$$\text{Et } e = \left( \frac{\epsilon_0 E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0} \right) = \epsilon_0 E^2 \quad (\text{IV.54})$$

On peut écrire le champ électrique sous la forme:

$$\vec{E} = -i \frac{\mu_0 c}{2\lambda} I_0 l \frac{\sin \theta}{r} e^{i(\omega t - kr)} \vec{e}_\theta = -i Z_0 \frac{I_0 l}{2\lambda} \frac{\sin \theta}{r} e^{i(\omega t - kr)} \vec{e}_\theta \quad (\text{IV.55})$$

$$\text{On a : } \vec{E} = Z_0 \frac{I_0 l}{2\lambda} \frac{\sin \theta}{r} |\cos(\omega t - kr)| \quad (\text{IV.56})$$

$$\text{D'où l'énergie : } dE = \epsilon_0 \left( Z_0 \frac{I_0 l}{2\lambda} \frac{\sin \theta}{r} \right)^2 \cos^2(\omega t - kr) 2\pi r^2 \sin \theta d\theta dr \quad (\text{IV.57})$$

Cependant, l'énergie se propage dans le vide à la vitesse  $c$ , donc  $dr=c$ . on trouve alors en intégrant sur  $\theta$  pour avoir toute la sphère

$$dE = \varepsilon_0 \left( Z_0 \frac{I_0 l}{2\lambda} \right)^2 \cos^2(\omega t - kr) 2\pi \int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta c dt \quad (\text{IV.58})$$

$$dE = \varepsilon_0 \left( Z_0 \frac{I_0 l}{2\lambda} \right)^2 \cos^2(\omega t - kr) 2\pi \frac{4}{3} c dt \quad (\text{IV.59})$$

La puissance rayonnée est donnée par :

$$P = \frac{dE}{dt} = \frac{2}{3} \pi c \varepsilon_0 Z_0^2 \cos^2(\omega t - kr) I_0^2 \left( \frac{l}{\lambda} \right)^2 = \frac{2}{3} \pi Z_0 \cos^2(\omega t - kr) I_0^2 \left( \frac{l}{\lambda} \right)^2 \quad (\text{IV.60})$$

Dont la valeur est moyenne :

$$\langle P \rangle = \frac{2}{3} \pi Z_0 \langle \cos^2(\omega t - kr) \rangle I_0^2 \left( \frac{l}{\lambda} \right)^2 = \frac{1}{3} \pi Z_0 I_0^2 \left( \frac{l}{\lambda} \right)^2 \quad (\text{IV.61})$$

$$\text{Alors : } \langle P \rangle = R_r \langle I^2 \rangle = \frac{1}{2} R_r I_0^2 \quad (\text{IV.62})$$

$$R_r \text{ Représente la résistance du rayonnement est donnée par : } R_r = \frac{2}{3} \pi Z_0 \left( \frac{l}{\lambda} \right)^2 \quad (\text{IV.63})$$

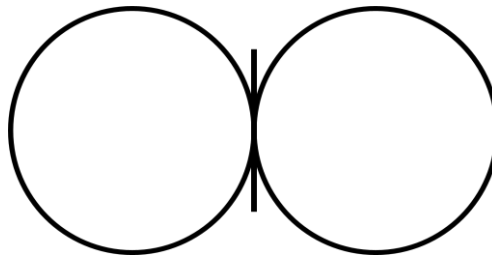


Figure IV.4. Rayonnement du dipôle élémentaire.

Le rayonnement du dipôle élémentaire, vu en coupe le long du dipôle, forme deux cercles jointifs au centre du dipôle, et le champ électrique est orienté tangentielllement le long de ces cercles.

### b- l'antenne demi-onde

Le dipôle demi-onde est une antenne formée par deux conducteurs de longueur totale égale à la **moitié** de la longueur d'onde ( $l = \frac{\lambda}{2}$ ) (Voir la figure IV.5.). L'unique particularité de cette longueur est que les formules mathématiques se simplifient énormément.

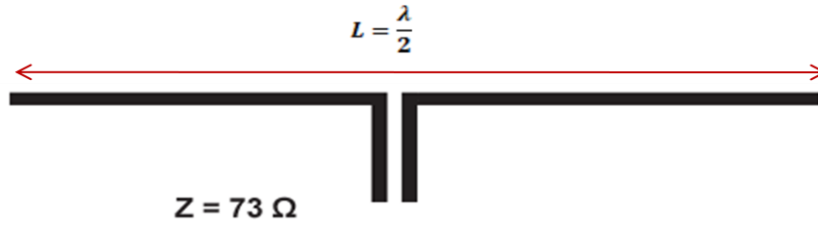


Figure IV.5. Antenne demi-onde

**Diagramme du rayonnement pour lambda /2.**

Diagramme en coupe du rayonnement pour lambda/2. Pour comparaison, la section du diagramme d'émission d'un dipôle court apparaît en pointillés. Ils ne sont pas très différents.

Le courant en point de l'antenne dépend désormais du temps et du point :  $I(z, t) = I_0 e^{i\omega t}$

Le champ électrique rayonné par une longueur élémentaire  $dz$  est :

$$\vec{dE} = -i Z_0 \frac{I_0(z) dz}{2\lambda} \frac{\sin \theta}{r} e^{i(\omega t - k(r - z \cos \theta))} \vec{e}_\theta \quad (\text{IV.64})$$

\*Alors le champ  $E$  s'exprime selon (on place l'origine du repère au milieu de l'antenne):

$$\vec{E} = -i Z_0 \frac{1}{2\lambda} \frac{\sin \theta}{r} e^{i(\omega t - kr)} \int_{-1/2}^{1/2} I_0(z) e^{ikz \cos \theta} dz \vec{e}_\theta \quad (\text{IV.65})$$

$$\text{Le courant s'écrit : } I_0(z) = I_m \cos\left(2\pi \frac{z}{\lambda}\right) \quad (\text{IV.66})$$

$$\text{D'où : } \vec{E} = -i Z_0 \frac{1}{2\lambda} \frac{\sin \theta}{r} e^{i(\omega t - kr)} \int_{-1/2}^{1/2} I_m \cos\left(2\pi \frac{z}{\lambda}\right) e^{ikz \cos \theta} dz \vec{e}_\theta \quad (\text{IV.67})$$

On utilise les formules d'Euler pour calculer l'intégrale :

$$\int_{-1/2}^{1/2} I_m \cos\left(2\pi \frac{z}{\lambda}\right) e^{ikz \cos \theta} dz = \int_{-1/2}^{1/2} I_m \cos(kz) e^{ikz \cos \theta} dz \quad (\text{IV.68})$$

$$= \int_{-1/2}^{1/2} I_m \frac{e^{ikz} + e^{-ikz}}{2} e^{ikz \cos \theta} dz \quad (\text{IV.69})$$

$$= \frac{I_m}{2} \int_{-1/2}^{1/2} e^{ik(1+\cos \theta)z} dz + \frac{I_m}{2} \int_{-1/2}^{1/2} e^{ik(-1+\cos \theta)z} dz \quad (\text{IV.70})$$

$$= \frac{I_m}{2} \frac{[e^{ik(1+\cos \theta)z}]_{-1/2}^{1/2}}{ik(1+\cos \theta)} + \frac{I_m}{2} \frac{[e^{ik(-1+\cos \theta)z}]_{-1/2}^{1/2}}{ik(-1+\cos \theta)} \quad (\text{IV.71})$$

$$= \frac{I_m}{2} \frac{2i \sin\left(k(1+\cos \theta)\frac{1}{2}\right)}{ik(1+\cos \theta)} + \frac{I_m}{2} \frac{2i \sin\left(k(-1+\cos \theta)\frac{1}{2}\right)}{ik(-1+\cos \theta)} \quad (\text{IV.72})$$

Or  $\frac{k}{2} = \frac{\pi}{2}$ , alors le résultats se simplifie selon :

$$\int_{-1/2}^{1/2} I_m \cos\left(2\pi \frac{z}{\lambda}\right) e^{ikz \cos \theta} dz = \frac{I_m}{k} \left( \frac{\sin\left((1+\cos \theta)\frac{\pi}{2}\right)}{1+\cos \theta} + \frac{\sin\left((-1+\cos \theta)\frac{\pi}{2}\right)}{-1+\cos \theta} \right) \quad (\text{IV.73})$$

$$= \frac{I_m}{k} \left( \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos \theta\right)}{1+\cos \theta} + \frac{-\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos \theta\right)}{-1+\cos \theta} \right) = \frac{I_m}{k} \frac{2\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos \theta\right)}{1-\cos^2 \theta} = \frac{I_m}{k} \frac{2\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos \theta\right)}{\sin^2 \theta} \quad (\text{IV.74})$$

Le champ rayonné est finalement :

$$\vec{E} = -i Z_0 \frac{1}{2\lambda} \frac{\sin \theta}{r} e^{i(\omega t - kr)} \frac{I_m}{k} \frac{2\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos \theta\right)}{\sin^2 \theta} \vec{e}_\theta \quad (\text{IV.75})$$

$$= -i \frac{Z_0 I_m}{2\pi} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos \theta\right)}{\sin \theta} \frac{e^{i(\omega t - kr)}}{r} \vec{e}_\theta \quad (\text{IV.76})$$

Le champ magnétique se déduit de  $\vec{E}$  comme dans le cas précédent. On a encore une structure

$$\text{localement plane et } \vec{B} = \frac{|\vec{E}|}{c} \vec{e}_\varphi \quad (\text{IV.77})$$

Le vecteur de Poynting  $\vec{\Pi}$  associé au champ rayonné est :

$$\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} = \frac{\vec{E}^2}{\mu_0 c} \vec{e}_r = \frac{1}{\mu_0 c} \left( \frac{Z_0 I_m}{2\pi} \right)^2 \left( \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos \theta\right)}{\sin \theta} \right)^2 \frac{\cos^2(\omega t - kr)}{r^2} \vec{e}_r \quad (\text{IV.78})$$

D'où la valeur moyenne :

$$\langle \vec{\Pi} \rangle = \frac{1}{2\mu_0 c r^2} \left( \frac{Z_0 I_m}{2\pi} \right)^2 \left( \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos \theta\right)}{\sin \theta} \right)^2 \vec{e}_r \quad (\text{IV.79})$$

Le flux moyen à travers une sphère de rayon  $r$  :

$$P = \iint \langle \vec{\Pi} \rangle \cdot \vec{dS} = \iint \frac{1}{2\mu_0 c r^2} \left( \frac{Z_0 I_m}{2\pi} \right)^2 \left( \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos \theta\right)}{\sin \theta} \right)^2 r^2 \sin \theta \overline{d\theta} \vec{e}_\varphi \quad (\text{IV.80})$$

$$= \frac{\pi}{\mu_0 c} \left( \frac{Z_0 I_m}{2\pi} \right)^2 \int_0^\pi \left( \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos \theta\right)}{\sin \theta} \right)^2 \overline{d\theta} = \frac{Z_0 I_m^2}{4\pi} \int_0^\pi \left( \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos \theta\right)}{\sin \theta} \right)^2 \overline{d\theta} \quad (\text{IV.81})$$

$$\text{Alors : } P = \frac{1}{2} R_r I_m^2 \quad (\text{IV.82})$$

$$\text{Et la résistance de rayonnement est donnée par : } R_r = \frac{Z_0}{2\pi} \int_0^\pi \left( \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos \theta\right)}{\sin \theta} \right)^2 \overline{d\theta} \quad (\text{IV.83})$$

### Remarque:

-L'intégrale se calcule numériquement : une valeur approchée est de 1.219.

- La résistance d'une antenne demi-onde est égale à environ 73  $\Omega$

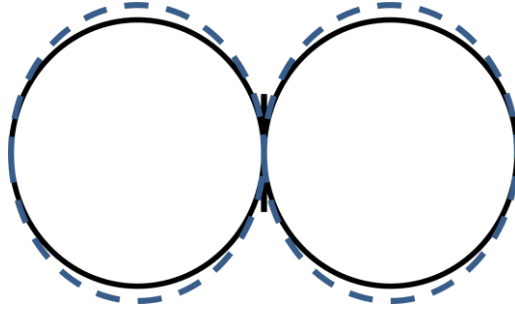


Figure IV.6. Rayonnement d'un dipôle demi-onde

#### IV.4. Quadripôle électrique et dipôle magnétique:

Considérons des sources localisées dans une région de dimension  $a$  autour de  $O$ . On observe le champ rayonné à longue distance; Le potentiel vecteur retardé est :

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi r} (-ik) \int \vec{j}(\vec{r}')(\vec{n}\vec{r}') d^3\vec{r}' e^{i(kr - \omega t)} \quad (\text{IV.84})$$

En utilisant la formule:

$$\vec{n}(\vec{r}' \wedge \vec{j}) = \vec{r}'(\vec{n}\vec{j}) - \vec{j}(\vec{n}\vec{r}') \quad (\text{IV.85})$$

Il vient :

$$\int \vec{j}(\vec{r}')(\vec{n}\vec{r}') d^3\vec{r}' = \frac{1}{2} \int \vec{j}(\vec{n}\vec{r}') d^3\vec{r}' + \frac{1}{2} \int \vec{j}(\vec{n}\vec{r}') d^3\vec{r}' \quad (\text{IV.86})$$

$$\int d^3\vec{r}' j^i(\vec{n}\vec{r}') = \int \left[ \underbrace{\frac{1}{2} \vec{j}(\vec{n}\vec{r}') + \frac{1}{2} (\vec{r}')(\vec{n}\vec{j})}_{J^i} - \underbrace{\frac{1}{2} \vec{n} \wedge (\vec{r}' \wedge \vec{j})}_{R^i} \right] d^3\vec{r}' = J^i + R^i \quad (\text{IV.87})$$

On calcule  $J^i$  :

$$J^i = \frac{1}{2} \int [j^i(n^j x^j) + x^i(n^j j^j)] d^3\vec{r}' = \frac{1}{2} n^j \int [j^i x^j + j^j x^i] d^3\vec{r}' \quad (\text{IV.88})$$

On considère le terme de surface :

$$\int_{\Omega} \partial_k [x^i x^j j^k] d^3\vec{r}' = \int_{\Omega} [\partial_k^i x^j j^k + x^i \partial_k^j j^k + x^i x^j \partial_k^k j^k] d^3\vec{r}' \quad (\text{IV.89})$$

$$0 = \int [x^j j^i + x^i j^j - x^i x^j \frac{\partial \rho}{\partial t}] d^3\vec{r}' \quad (\text{IV.90})$$

Le moment magnétique est donné par:

$$\vec{M} = \frac{1}{2} \int (\vec{r}' \wedge \vec{j}) d^3\vec{r}' \quad (\text{IV.91})$$

Le potentiel vecteur est :

$$\vec{A}^i(\vec{r}, t) = -\frac{\omega^2}{8\pi r \epsilon_0 c^3} e^{i(kr - \omega t)} n^j \int x^i x^j \rho(\vec{x}) d^3\vec{r}' + \frac{ik\mu_0}{4\pi r} (\vec{n} \wedge \vec{M})^i e^{i(kr - \omega t)} \quad (\text{IV.92})$$

Il s'écrit sous la forme :

$$\vec{A}^i(\vec{r}, t) = \frac{1}{r} e^{ikr} n^j \Lambda^{ij} \quad (\text{IV.93})$$

Calculons le champ magnétique  $\vec{B}$ :

$$\vec{B}^i = (\text{rot } \vec{A})^i = \varepsilon^{ijk} \partial_j A^k = \varepsilon^{ijk} \partial_j \left( \frac{e^{ikr}}{r} \right) \Lambda^{kl} n^l = \frac{ik}{r} \underbrace{\varepsilon^{ijk} n^j \Lambda^{kl} n^l}_{(*)} e^{ikr} \quad (\text{IV.94})$$

Le terme (\*) est égal à :

$$(*) = \varepsilon^{ijk} n^j n^l \int x^k x^l \rho(\vec{x}) d^3\vec{x} = \varepsilon^{ijk} n^j n^l \int \left( x^k x^l - \frac{1}{3} \delta^{kl} \right) \rho(\vec{x}) d^3\vec{x} \quad (\text{IV.95})$$

Le champ magnétique est:

$$\vec{B} = \frac{-i \omega^3 e^{i(kr-\omega t)}}{24 \pi \varepsilon_0 c^4} \frac{1}{r} \vec{n} \wedge Q \vec{n} - \frac{\omega^2}{4 \pi r \varepsilon_0 c^4} e^{i(kr-\omega t)} \vec{n} \wedge (\vec{n} \wedge \vec{M}) \quad (\text{IV.96})$$

$$Q^{ij} = \int (3 x^i x^j - \delta^{ij} \vec{x}^2) \rho(\vec{x}) d^3\vec{x} \quad (\text{IV.97})$$

Q est un tenseur symétrique de trace nulle. Calculons la puissance rayonnée :

$$\vec{n} \wedge Q \vec{n} = \varepsilon_{ijk} n_j Q_{kl} n_l \quad (\text{IV.98})$$

Par conséquent :

$$[\vec{n} \wedge Q \vec{n}]^2 = \varepsilon_{ijk} n_j Q_{kl} n_l \varepsilon_{i\rho\tau} n_\rho Q_{\tau\sigma} n_\sigma \quad (\text{IV.99})$$

$$= (\delta_{j\rho} \delta_{k\tau} - \delta_{j\tau} \delta_{k\rho}) n_j n_\rho n_l n_\sigma Q_{kl} Q_{\tau\sigma} \quad (\text{IV.100})$$

$$= n_l n_\sigma Q_{kl} Q_{k\sigma} - n_j n_k n_l n_\sigma Q_{kl} Q_{j\sigma} \quad (\text{IV.101})$$

La contribution quadripolaire électrique à la puissance rayonnée par unité d'angle solide est :

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{\omega^6}{1152 \pi^2 c^5 \varepsilon_0} |\vec{n} \wedge Q \vec{n}|^2 \quad (\text{IV.102})$$

La contribution dipolaire magnétique à la puissance rayonnée par unité d'angle solide est :

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{\omega^4}{32 \pi^2 c^5 \varepsilon_0} |\vec{n} \wedge (\vec{n} \wedge \vec{M})|^2 \quad (\text{IV.103})$$

**Puissance totale rayonnée :**

### 1- Cas quadripolaire électrique :

A partir de la relation (IV.101), l'invariance par rotation donne



$$\int n_l n_\sigma d\Omega = \frac{4\pi}{3} \delta_{l\sigma} \quad (\text{IV.104})$$

$$\int n_j n_k n_l n_\sigma d\Omega = \frac{4\pi}{15} (\delta_{jk} \delta_{l\sigma} + \delta_{j\sigma} \delta_{kl} + \delta_{jl} \delta_{k\sigma}) \quad (\text{IV.105})$$

Il vient en utilisant  $\text{tr} Q = 0$  :

$$\int [\vec{n} \wedge Q \vec{n}]^2 d\Omega = \frac{4\pi}{3} Q_{kl} Q_{kl} - \frac{4\pi}{15} [2 Q_{kl} Q_{kl}] = \frac{4\pi}{5} Q_{kl} Q_{kl} = \frac{4\pi}{5} \text{tr} (Q^2) \quad (\text{IV.106})$$

$$\text{Alors:} \quad P_{\text{qe}} = \frac{\omega^6}{1440\pi\epsilon_0 c^5} \text{tr} (Q^2) \quad (\text{IV.107})$$

## 2 - Cas dipolaire magnétique :

$$[\vec{n} \wedge (\vec{n} \wedge \vec{M})]^2 = [\vec{n}(\vec{M} \cdot \vec{n}) - \vec{M}]^2 = (\vec{M} \cdot \vec{n})^2 - 2(\vec{n} \cdot \vec{M})^2 + \vec{M}^2 \quad (\text{IV.108})$$

$$= \vec{M}^2 - (\vec{M} \cdot \vec{n})^2 = M^2 - M^2 \cos^2 \theta = M^2 \sin^2 \theta \quad (\text{IV.109})$$

On en déduit donc :

$$P_{\text{dm}} = \frac{2\pi\omega^4 M^2}{32\pi^2 \epsilon_0 c^5} \int_0^\pi \sin^2 \theta \sin \theta d\theta = \frac{M^2 \omega^4}{12\pi^2 \epsilon_0 c^5} \quad (\text{IV.110})$$

## IV.5. Rayonnement d'un quadripôle magnétique

### IV.5.1. Définition

En physique, le quadripôle magnétique est une source de champ magnétique.

La manière la plus simple pour représenter un quadripôle est l'addition de deux aimants droits parallèles, en sens inverse. Les composantes principales de leur champ magnétique s'annulent, seules subsistent les composantes de l'ordre supérieur.

Le principe d'un *Quadripôle magnétique* est semblable au cas électrostatique, à ceci près que la règle des trois doigts de la main droite complique les choses.

### IV.5.2-Le champ créé par un quadripôle magnétique

Ce type de quadripôle possède quatre pôles : deux nord et deux sud, situés aux faces alternées d'un carré. Dans le plan (noté ici  $z=0$ ) où se trouvent les quatre pôles, le champ magnétique idéal est donné par :

$$\begin{cases} B_x = K \times y \\ B_y = K \times x \\ B_z = 0 \end{cases} \quad (\text{IV.111})$$

Avec  $K$  est le gradient (en Teslas par mètre) de la composante en  $x$  selon  $y$ , ou inversement. Une composante du champ est nulle sur les deux axes de symétrie, il est totalement nul au centre<sup>1</sup>. Dans l'axe normal au quadripôle, noté ici  $z$ , le champ décroît en  $z^4$

Le quadripôle magnétique est utilisé dans les accélérateurs de particules. il sert à focaliser ou défocaliser les particules électriquement chargées. Si  $K$  est positif, des particules chargées positivement qui traversent le plan du quadripôle sont focalisées horizontalement et défocalisées verticalement. Ce résultat est inversé si on change le signe de  $K$  ou celui de la charge de la particule.

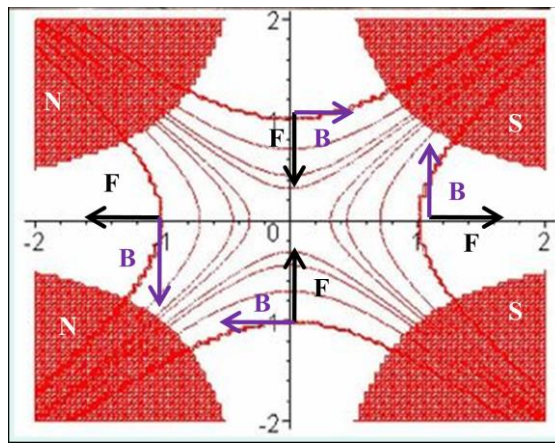


Figure IV.7 : pôles et lignes de champ d'un quadripôle magnétique



Figure IV.8 : Photographie d'un quadripôle magnétique

#### IV.6. Théorème de réciprocité

On considère un volume source  $V_1$  avec une densité de courant  $J_1$ , placé dans un milieu éventuellement structuré (la Fig. 9.3gauche).

Dans le deuxième cas, représenté sur la Fig. 9.3 (droite 9.3a), le même milieu est excité par une autre source de volume  $V_2$  et de densité de courant  $j_2$ .

$E_1$  et  $H_1$  sont les champs électrique et magnétique rayonnés dans le premier cas, respectivement.

$E_2$  et  $H_2$  sont les champs électrique et magnétique rayonnés dans le deuxième cas.

On suppose que ces sources rayonnent dans un milieu linéaire, isotrope et homogène, caractérisé par une permittivité électrique  $\epsilon$  et une perméabilité magnétique  $\mu$  (on note que les paramètres  $\epsilon_r$  et  $\mu_r$  décrivant les matériaux sont des tenseurs)

Nous allons voir que les champs dans les cas 1 et 2 sont reliés, la relation obtenue formant le *théorème de réciprocité*.

La figure IV.9 présente deux cas considérées dans le théorème de réciprocité. Les objets en bleu représentent un milieu structuré (absorbants, parois réfléchissantes ....etc).

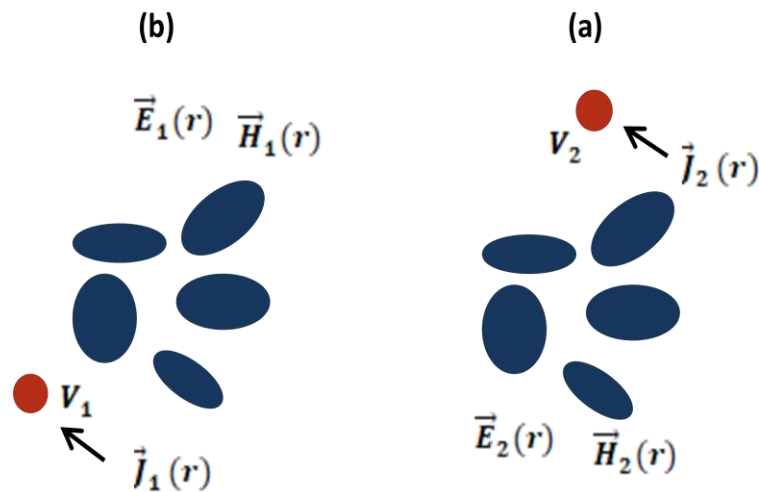


Figure IV.9. Théorème de réciprocité.

Les champs dans les deux cas satisfont aux équations de Maxwell :

$$\vec{\nabla} \times \vec{E}_1 = \omega i \vec{B}_1 \quad (\text{IV.112})$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H}_1 = \vec{J}_1 - \omega i \vec{D}_1 \quad (\text{IV.113})$$

Et  $\vec{\nabla} \times \vec{E}_2 = \omega i \vec{B}_2 \quad (\text{IV.114})$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H}_2 = \vec{J}_2 - \omega i \vec{D}_2 \quad (\text{IV.115})$$

On a également les relations constitutives

$$\vec{D}_1 = \varepsilon_0 \varepsilon_r \vec{E}_1 \quad \text{et} \quad \vec{B}_1 = \mu_0 \mu_r \vec{H}_1. \quad (\text{IV.116})$$

$$\vec{D}_2 = \varepsilon_0 \varepsilon_r \vec{E}_2 \quad \text{et} \quad \vec{B}_2 = \mu_0 \mu_r \vec{H}_2. \quad (\text{IV.117})$$

Supposons ici que ces tenseurs sont symétriques, ce qui est une condition nécessaire à la validité du théorème de réciprocité.

A partir des équations de Maxwell ci-dessus, nous obtenons l'égalité suivante :

$$\vec{H}_2 \cdot \vec{\nabla} \times \vec{E}_1 - \vec{E}_1 \cdot \vec{\nabla} \times \vec{H}_2 + \vec{E}_2 \cdot \vec{\nabla} \times \vec{H}_1 - \vec{H}_1 \cdot \vec{\nabla} \times \vec{E}_2 \quad (\text{IV.118})$$

$$= \omega i (\vec{B}_1 \cdot \vec{H}_2 - \vec{H}_1 \cdot \vec{B}_2) - \omega i (\vec{D}_1 \cdot \vec{E}_2 - \vec{E}_1 \cdot \vec{D}_2) + \vec{j}_1 \cdot \vec{E}_2 - \vec{j}_2 \cdot \vec{E}_1 \quad (\text{IV.119})$$

on peut écrire le membre de gauche sous la forme :  $\vec{\nabla} \cdot (\vec{E}_1 \times \vec{H}_2 - \vec{E}_2 \times \vec{H}_1)$ . le membre de droite peut se simplifier car chacun des deux premiers termes s'annule lorsque  $\varepsilon$  et  $\mu$  sont symétriques. On trouve alors :

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{E}_1 \times \vec{H}_2 - \vec{E}_2 \times \vec{H}_1) = \vec{j}_1 \cdot \vec{E}_2 - \vec{j}_2 \cdot \vec{E}_1 \quad (\text{IV.120})$$

En intégrant cette dernière relation, sur un volume  $V$ , entouré par une surface fermée  $S$  :

Le membre de gauche se transforme en une intégrale de surface, conduisant à`

$$\int_S [\vec{E}_1(r) \times \vec{H}_2(r) - \vec{E}_2(r) \times \vec{H}_1(r)] \cdot \vec{n} \, d^2r = \int_V [\vec{j}_1(r) \cdot \vec{E}_2(r) - \vec{j}_2(r) \cdot \vec{E}_1(r)] \, d^3r \quad (\text{IV.121})$$

Où  $\vec{n}$  désigne la normale extérieure à l'élément de surface  $ds$ .

Cette relation est appelé la relation de réciprocité de Lorentz.

- Lorsque la surface  $S$  est une sphère située à une distance très grande ( $R \rightarrow \infty$ ) des sources de rayonnement: ce sera l'hypothèse générale faite dans l'étude des antennes, alors les champs électrique et magnétique prennent la forme d'ondes sphériques sortantes, et ont des amplitudes complexes de la forme :

$$\vec{E}_1(r) \simeq \vec{E}_1(u) \frac{e^{(ik_0 r)}}{r} \quad \text{et} \quad \vec{E}_2(r) \simeq \vec{E}_2(u) \frac{e^{(ik_0 r)}}{r} \quad (\text{IV.122})$$

$$\vec{H}_1(r) \simeq \vec{H}_1(u) \frac{e^{(ik_0 r)}}{r} \quad \text{et} \quad \vec{H}_2(r) \simeq \vec{H}_2(u) \frac{e^{(ik_0 r)}}{r} \quad (\text{IV.123})$$

Où  $\vec{u}$  est le vecteur unitaire définissant la direction d'observation.

Les équations de Maxwell :  $\vec{\nabla} \times \vec{E}_1(r) = i\omega\mu_0 \vec{H}_1(r)$  et  $\vec{\nabla} \times \vec{E}_2(r) = i\omega\mu_0 \vec{H}_2(r)$  imposent que les amplitudes soient reliées par  $\omega\mu_0 \vec{H}_1(u) = k_0 u \wedge \vec{E}_1(u)$  et  $\omega\mu_0 \vec{H}_2(u) = k_0 u \wedge \vec{E}_2(u)$ ,

de telle sorte que les terme  $\vec{E}_1 \times \vec{H}_2 - \vec{E}_2 \times \vec{H}_1$  s'annule en champ lointain (donc sur la surface S).

Nous obtenons donc finalement :

$$\int_{V_1} \vec{J}_1(r) \cdot \vec{E}_2(r) d^3r = \int_{V_2} \vec{J}_2(r) \cdot \vec{E}_1(r) d^3r \tag{IV.124}$$

Les intégrales étant étendues aux volumes des deux sources. Ce résultat est connu sous l'appellation de théorème de réciprocité. Il montre que les champs rayonnés dans les cas 1 et 2 de la Figure IV.9 ne sont pas indépendants.

Dans le cas de sources dipolaires électriques situées aux points  $r_1$  et  $r_2$ , et de moments dipolaires  $p_1$  et  $p_2$ , on a  $\vec{J}_1(r) = -i\omega p_1 \delta(r - r_1)$  et  $\vec{J}_2(r) = -i\omega p_2 \delta(r - r_2)$ . On obtient alors une forme simplifiée du théorème de réciprocité :

$$p_1 \cdot \vec{E}_2(r_1) = p_2 \cdot \vec{E}_1(r_2) \tag{IV.125}$$

Afin d'interpréter le résultat, on considère le cas particulier où les deux sources sont de même amplitude. Le théorème de réciprocité présente alors qu'en inter-changeant source et point d'observation, la composante du champ projetée sur la direction de la source est conservée.

**Cas particulier:** on considère les deux sources possèdent la même amplitude ( $|p_1| = |p_2|$ ). Le théorème de réciprocité présente alors qu'en inter changeant source et point d'observation (voir la Figure IV.10), la composante du champ projetée sur la direction de la source est conservée.

**Remarque :**

Pour des ondes scalaires (par exemple :en acoustique dans un fluide), il n'y aurait pas de projection et on aurait plus simplement  $\vec{E}_2(r_1) = \vec{E}_1(r_2)$ .

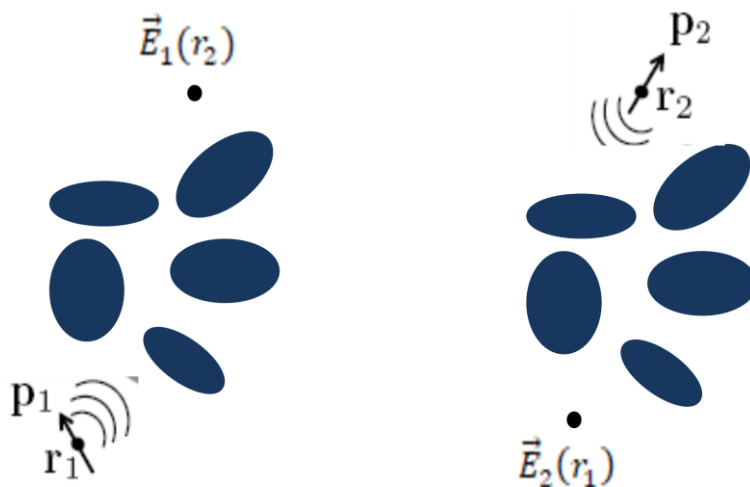


Figure IV.10. Théorème de réciprocité avec des sources dipolaires

# *Annexe*

## 1-Formulaires Dérivées et primitives des fonctions et quelques formules en prime :

Fonction	Domaine de dérivabilité	Dérivée	Primitive
	Intervalle d'intégration		
$\alpha$ (constante)	$\mathbb{R}$	0	$\alpha x + C$
$x$	$\mathbb{R}$	1	$\frac{x^2}{2} + C$
$x^n$	$\mathbb{R}$	$n x^{n-1}$	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + C$
$\frac{1}{x}$	$]-\infty, 0[$ ou $]0, +\infty[$	$-\frac{1}{x^2}$	$\ln x  + C$
$\frac{1}{x^n}$ où $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$	$]-\infty, 0[$ ou $]0, +\infty[$	$-\frac{n}{x^{n+1}}$	$-\frac{1}{(n-1)x^{n-1}} + C$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$]0, +\infty[$	$-\frac{1}{2x^{\frac{3}{2}}}$	$2\sqrt{x} + C$
$\sqrt{x}$	$]0, +\infty[$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\frac{3}{2} \cdot x^{\frac{3}{2}} + C$
$\ln x$	$]0, +\infty[$	$\frac{1}{x}$	$x \ln x - x + C$
$e^x$	$\mathbb{R}$	$e^x$	$e^x + C$
$\sin x$	$\mathbb{R}$	$\cos x$	$-\cos x + C$
$\cos x$	$\mathbb{R}$	$-\sin x$	$\sin x + C$
$-\sin x$	$\mathbb{R}$	$-\cos x$	$\cos x$
$-\cos x$	$\mathbb{R}$	$\sin x$	$-\sin x + C$

Tableau I. Formulaires dérivées et primitives des fonctions

## 2-Opérations et dérivées

On suppose que  $f$  et  $g$  sont deux fonctions dérivables sur un intervalle  $I$

Opération	Dérivée
$(f + g)'$	$f' + g'$
$(f \cdot g)'$	$f' \cdot g + f \cdot g'$
$\left(\frac{f}{g}\right)'$	$\frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$
$(\alpha \cdot f)'$ $\alpha$ désignant une constante	$\alpha \cdot f'$
$\left(\frac{1}{f}\right)'$	$-\frac{f'}{f^2}$
$(f^n)'$ $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$	$n f^{n-1} \cdot f'$
$\left(\frac{1}{f^n}\right)'$ $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$	$-\frac{n f'}{f^{n+1}}$
$(e^f)'$	$f' e^f$
$(\ln f )'$	$\frac{f'}{f}$
$(\sin(f))'$	$f' \cos(f)$
$(\cos(f))'$	$-f' \sin(f)$

Tableau 2. Opérations et Dérivée

## 3-Opérations et primitives

Opération	Primitive
$f' f^n$	$\frac{f^{n+1}}{n+1}$ $n \in \mathbb{N}^*$
$\frac{f'}{f^2}$	$-\frac{1}{f}$
$\frac{f'}{f^n}$	$-\frac{1}{(n-1)f^{n-1}}$ $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$
$\frac{f'}{\sqrt{f}}$	$2\sqrt{f}$ (En supposant $f > 0$ )
$\frac{f'}{f}$	$\ln f $
$f' e^f$	$e^f$

Tableau 3. Opérations et primitives



## 4-Quelques constantes fondamentales universelles en physique:

Symbole	Constant	Valeur et unité
c	vitesse de la lumière dans le vide	$3 \times 10^8 \text{ m/s}$
$m_p$	masse du proton	$1.67 \times 10^{-27} \text{ Kg}$
$m_e$	masse de l'électron	$9.1 \times 10^{-31} \text{ Kg}$
e	charge de l'électron	$1.6 \times 10^{-19} \text{ C}$
h	constante de Planck	$6.62 \times 10^{-34}$
k	constante de Boltzmann	$1.38 \times 10^{-23}$
R	constante des gaz parfaits	$8.32 \text{ J K}^{-1} \text{ mol}^{-1}$
$R_H$	constante de Rydberg	13.6 eV
N	nombre d'Avogadro	$6.02 \times 10^{23}$
$\mu_0$	perméabilité magnétique du vide	$4\pi \times 10^{-7}$
G	constante gravitationnelle	$6.67 \times 10^{-11}$

Tableau 4. Quelques constantes fondamentales universelles en physique

# *Références*

# *Bibliographiques*

**Références Bibliographique :**(Livres et photocopiés, sites internet, ect) :

- [1] A.F.BENHABIB, A.HADJADI,(1992), « électromagnétisme ,relativité, restreinte »cours et problèmes résolus :Tom 1,office des publications universitaires ,Alger
- [2] Kenneth MAUSSANG, (2019), « Électromagnétisme »HMEF104 - MEEF 2<sup>nd</sup> degré, UNIVERSITÉ DE MONTPELLIER.
- [3] David SÉNÉCHAL, (2018),«ÉLECTROMAGNÉTISME AVANCÉ PHQ526», UNIVERSITÉ DE SHERBROOKE
- [4] Michel HULIN,(1998),«Électromagnétisme 2: ondes électromagnétiques», ARMAND COLIN, Saint Michel paris 5<sup>e</sup>
- [5] Michel HULIN,(1998), «Électromagnétisme 1: Equation de maxwell», ARMAND COLIN, Saint Michel paris 5<sup>e</sup>.
- [6] Patrik CHARMONT, (2006), «électromagnétisme : fiches, méthodes et problèmes corrigés » ellipses, France.
- [7] REMAOUN Sidi Mohammed (2015), «Polycopié d'Electromagnétisme Avec exercices pour Master et Licence».
- [8]P.KREMPE, (2003), «électromagnétisme MPSI: Cours, méthodes et exercices résolus», Agnès Nicol Bréal, Rome.
- [9] P.BARUCH, M.HULIN, J.F.PETROFF HERMANN, (1972).«Électricité, magnétisme cours», PARIS.
- [10] Rémi CARMINATI, Cheryl FEUILLET-PALMA, (2018), «Ondes Electromagnétiques Notes de cours»
- [11] DOMINIC GRINIER,(2021),«électromagnétisme et transmission des ondes», Québec (QC) ,Q1V 0A6.
- [12] DOMINIC GRINIER, (2020), «Antennes et propagation radio », Québec(QC),Q1V 0A6.
- [13] Richard TAILLET (2013) , «Électromagnétisme », Bibliothèque royale de Belgique
- [14] Jean-Marie Malherbe, (2018 cel-01697221)«Electromagnétisme. Licence». France.
- [15] Raphael GILLARD, (2005), « propagation des ondes électromagnétiques ».
- [16] Guy Marquis, IPG Strasbourg, (2004) ,«Cours d'électromagnétisme »
- [17] Gabriel Soriano, (2012), «électromagnétisme: notes de cours»
- [18] H. Djeouah ,(2013), Electromagnétisme cours et exercices .
- [19] Electromagnétisme (2020): PEIP 2 Polytech.

