I.1.Introduction :

Les lois de l'électromagnétisme sont basées sur des notions mathématiques, Ce chapitre présente les définitions et les propriétés qui sont utilisées en électromagnétisme telles que: la notion de champ et celle d'opérateurs vectoriels, les trois objets mathématiques qui agissent sur ces champs qui sont: le gradient, la divergence et le rotationnel.

I.2. Rappels sur les vecteurs:

Soit $f(x, y, z)$ une fonction scalaire des variables (x, y, z).

$\vec{A}(A_x, A_y, A_z)$,$\vec{B}(B_x, B_y, B_z)$, $\vec{C}(C_x, C_y, C_z)$Désignent des champs vectoriels, chaque composante est un champ scalaire dépendant des variables spatiales (x, y, z).

I.2.1. Le produit scalaire:

On appelle produit scalaire des vecteurs $\vec{A}$ et $\vec{B}$**,** noté $\vec{A}\,.\vec{B}$ **,** le scalaire égal au produit des normes des deux vecteurs par le cosinus de l'angle entre les deux vecteurs entre les deux vecteurs $\boldsymbol{\alpha} = (\widehat{\vec{A}\,,\vec{B}})$ soit encore :

$$\vec{A}\,.\vec{B} = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z = \|\vec{A}\| \times \|\vec{B}\| \cos(\vec{A}\,,\vec{B}) \qquad \textbf{(I.1)}$$

$$\|\vec{A}\|^2 = \vec{A}^2 = \vec{A}\,.\vec{A} = A_x^2 + A_y^2 + A_z^2 \qquad \textbf{(I.2)}$$

Propriétés:

-Lorsque $\vec{A}$ ou $\vec{B}$ est nul , $\vec{A}\,.\vec{B} = 0.$

-lorsqu'aucun des vecteurs n'est nul mais les deux vecteurs sont orthogonaux $\vec{A} \perp \vec{B}$, $\boldsymbol{\alpha} = (\widehat{\vec{A}\,,\vec{B}}) = \pm\frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos(\alpha) = 0$ d'où $\vec{A}\,.\vec{B} = 0.$

-Le produit scalaire de deux vecteurs est un nombre positif ou négatif.

-La **multiplication scalaire** entre deux vecteurs est **commutative** c.-à-d. $\vec{A}\,.\vec{B} = \vec{B}\,.\vec{A}$ **(I.3)**

-La **multiplication scalaire** entre deux vecteurs est **distributive par rapport à l'addition vectorielle** c.-à-d. $\vec{A}.\left(\vec{B} + \vec{C}\right) = \vec{A}.\vec{B} + \vec{A}.\vec{C}$. **(I.4)**

I.2. 2. Le produit vectoriel :

$\vec{A}$ et $\vec{B}$ étant deux vecteurs de l'espace vectoriel, Le produit vectoriel de deux vecteurs $\vec{A}$ et $\vec{B}$ est un vecteur : $\vec{A} \wedge \vec{B} = (A_yB_z - A_zB_y,\quad A_zB_x - A_xB_z,\quad A_xB_y - A_yB_x)$ **(I.5)**

$\vec{A} \wedge \vec{B}$ est un vecteur orthogonal à la fois à $\vec{A}$et à $\vec{B}$

Sa norme est définie par : $\|\vec{A} \wedge \vec{B}\| = \|\vec{A}\| \times \|\vec{B}\| \sin(\vec{A}\,,\vec{B})$ **(I.6)**

$\|\vec{A} \wedge \vec{B}\|$Représente l'aire du parallélogramme généré par $\vec{A}, \vec{B}$

Orientation du produit vectoriel : Règle des doigts de la main droite: $\vec{A} = pouce$, $\vec{B} = index$, $\vec{A} \wedge \vec{B} = majeur$

Propriétés:

-Le produit vectoriel de deux vecteurs colinéaires est nul. $\vec{A} \wedge \vec{B} = \vec{0}$

-Si $\vec{A} \neq \vec{0}$ et $\vec{B} \neq \vec{0}$ ne sont pas colinéaires, $\vec{A} \wedge \vec{B} \neq \vec{0}$

-La **multiplication vectorielle** entre deux vecteurs est anti**commutative** c'est à dire :

$. \vec{\mathbf{A}} \wedge \vec{\mathbf{B}} = -(\vec{\mathbf{B}} \wedge \vec{\mathbf{A}})$ **(I.7)**

-La **multiplication vectorielle** entre deux vecteurs est **distributive par rapport à l'addition vectorielle** c.-à-d. $\vec{\mathbf{A}} \wedge \left(\vec{\mathbf{B}} + \vec{\mathbf{C}}\right) = \vec{\mathbf{A}} \wedge \vec{\mathbf{B}} + \vec{\mathbf{A}} \wedge \vec{\mathbf{C}}$. **(I.8)**

I.2. 3. Le produit mixte :

Soient $\vec{A}\,,\vec{B}$ *et* $\vec{C}$ trois vecteurs de l'espace orienté. Le produit mixte de trois vecteurs est un nombre réel qu'on appelle aussi le déterminant de ces trois vecteurs.

On définit leur produit mixte par : $[\vec{\mathbf{A}}, \vec{\mathbf{B}}, \vec{\mathbf{C}}] = \vec{\mathbf{A}}.\left(\vec{\mathbf{B}} \wedge \vec{\mathbf{C}}\right)$ **(I.9)**

La valeur absolue du produit mixte $\|\vec{A}.\ (\vec{B}\wedge\vec{C})\|$Représente le volume du prisme droit généré par les trois vecteurs $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}$.

Propriétés:

-Le produit mixte est invariant par permutation circulaire c.-à-d. que :

$$\vec{\mathbf{A}}.\ (\vec{\mathbf{B}}\wedge\vec{\mathbf{C}}) = \vec{\mathbf{C}}.\ (\vec{\mathbf{A}}\wedge\vec{\mathbf{B}}) = \vec{\mathbf{B}}.\ (\vec{\mathbf{C}}\wedge\vec{\mathbf{A}}) \qquad \textbf{(I.10)}$$

- Si $\vec{A}, \vec{B}$ *et* $\vec{C}$. Sont coplanaires, ou si un des trois vecteurs au moins est nul, $\vec{\mathbf{A}}.\ (\vec{\mathbf{B}}\wedge\vec{\mathbf{C}}) = \mathbf{0}$.

-Si $\vec{A}\neq\vec{0}$, $\vec{B}\neq\vec{0}$ et $\vec{C}\neq\vec{0}$ ne sont pas coplanaires, $\vec{\mathbf{A}}.\ (\vec{\mathbf{B}}\wedge\vec{\mathbf{C}}) \neq \mathbf{0}$

I.2.4. Double produit vectoriel :

Le double produit vectoriel de trois vecteurs est un vecteur est défini par la formule suivante :

$$\vec{\mathbf{A}}\wedge\ (\vec{\mathbf{B}}\wedge\vec{\mathbf{C}}) = (\vec{\mathbf{A}}.\vec{\mathbf{C}})\vec{\mathbf{B}} - (\vec{\mathbf{A}}.\vec{\mathbf{B}})\vec{\mathbf{C}} \qquad \textbf{(I.11)}$$

I.3.Dérivées partielles, différentielle d'une fonction :

I.3.1.Dérivées partielles :

f (*x*, *y*, *z*) est une fonction des variables spatiales *x*, *y*, *z*

$\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ et $\frac{\partial f}{\partial z}$ sont les dérivées de la fonction *f* (*x*, *y*, *z*) par rapport à *x*, *y et z* respectivement

(Par exemple dans les calcule $\frac{\partial f}{\partial x}$ de en considérant *y* et *z* comme des constantes).

I.3.2.Différentielle :

La dérivées différentielle de *f* (*x*, *y*, *z*) est donnée par la relation suivante :

$$\mathbf{df} = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}}\,\mathbf{dx} + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{y}}\mathbf{dy} + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{z}}\mathbf{dz} \qquad \textbf{(I.12)}$$

I.4.Les opérateurs :

1.4.1. Champ scalaire - Champ vectoriel :

Un trièdre orthonormé $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ et *M* un point de l'espace, de coordonnées(*x*, *y*, *z*).

Le vecteur position qui défini le point *M* dans cette base est : $\overrightarrow{\mathbf{OM}} = \mathbf{x}\vec{\mathbf{\imath}} + \mathbf{y}\vec{\mathbf{\imath}} + \mathbf{z}\vec{\mathbf{\imath}}$ **(I.13)**

La fonction f(M) est dite fonction scalaire de point ou champ scalaire si : $f(M) = f(x, y, z)$

Le vecteur $\vec{V}(M)$ est dit fonction vectorielle de point ou champ vectoriel si :

$$\vec{\mathbf{V}}(\mathbf{M}) = \mathbf{V_x}(\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z})\vec{\mathbf{\imath}} + \mathbf{V_y}(\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z})\vec{\mathbf{\jmath}} + \mathbf{V_z}(\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z})\vec{\mathbf{z}} \qquad \textbf{(I.13)}$$

I.4.2.L'opérateur «nabla» :

L'opérateur nabla est un vecteur symbolique noté $\vec{\nabla}$ défini par et dont l'expression est **en coordonnées cartésiennes :**

$$\vec{\boldsymbol{\nabla}} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}\,\vec{\mathbf{\imath}} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{y}}\vec{\mathbf{\jmath}} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{z}}\vec{\mathbf{k}} \qquad \textbf{(I.14)}$$

L'opérateur nabla est utilisé pour écrire de manière plus compacte les opérateurs vectoriels.

I-4.3.L'opérateur gradient : (Gradient d'un champ scalaire) :

Le gradient noté $(\overrightarrow{grad})$ est un opérateur agissant sur un champ scalaire f(M) pour former un champ vectoriel.L'expression de cet opérateur dépend du système de coordonnées que l'on adopte.

-Dans le système en **coordonnées cartésienne *M*(*x*, *y*, *z*), repère Oxyz** $(\overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_z})$ **(ou** $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$**)**

$$\overrightarrow{\mathbf{grad}}(\mathbf{f}) = \vec{\boldsymbol{\nabla}}\mathbf{f} = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}}\,\overrightarrow{\mathbf{e_x}} + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{y}}\overrightarrow{\mathbf{e_y}} + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{z}}\overrightarrow{\mathbf{e_z}} \qquad \textbf{(I.15)}$$

-Dans le système en **coordonnées polaires *M*(*r*, *θ*) planes, repère mobile** $(\overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{e_\theta})$

$$\overrightarrow{\mathbf{grad}}(f) = \vec{\boldsymbol{\nabla}}f = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{r}}\,\overrightarrow{e_r} + \frac{1}{\mathbf{r}}\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \theta}\overrightarrow{e_\theta} \qquad \textbf{(I.16)}$$

Remarque: Les coordonnées polaires sont les coordonnées cylindriques sans la 3ème dimension *z*

-Dans le système en **coordonnées cylindriques *M*(*r*, *θ*, *z*), trièdre mobile** $(\overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{e_\theta}, \overrightarrow{e_z})$

$$\overrightarrow{\mathbf{grad}}(f) = \vec{\boldsymbol{\nabla}}f = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{r}}\,\overrightarrow{e_r} + \frac{1}{\mathbf{r}}\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \theta}\overrightarrow{e_\theta} + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{z}}\,\overrightarrow{e_z} \qquad \textbf{(I.17)}$$

Dans le système en coordonnées sphériques M(r, θ, φ), trièdre mobile $(\overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{e_\theta}, \overrightarrow{e_\varphi})$

$$\overrightarrow{\mathbf{grad}}(f) = \vec{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial r}\,\overrightarrow{e_r} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\overrightarrow{e_\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\,\overrightarrow{e_\varphi} \qquad \textbf{(I.18)}$$

I.4.4.L'opérateur divergence : (Divergence d'un champ vectoriel) :

La **divergence** notée $div(\vec{V})$ est un opérateur agissant sur un champ de vecteurs $\vec{V}$ (*M*) pour former un champ scalaire.L'expression de la **divergence** dépend du système de coordonnées que l'on adopte.

-Dans système en **coordonnées cartésienne** :

$$\mathrm{div}(\vec{V}) = \vec{\nabla}.\vec{V} = \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z} \qquad \textbf{(I.19)}$$

-Dans le système en **coordonnées polaires**

$$\mathrm{div}(\vec{V}) = \vec{\nabla}.\vec{V} = \frac{1}{r}\frac{\partial(r\,V_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial(V_\theta)}{\partial \theta} \qquad \textbf{(I.20)}$$

-Dans le système en **coordonnées cylindriques**

$$div(\vec{V}) = \vec{\nabla}.\vec{V} = \frac{1}{r}\frac{\partial(r\,V_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial(V_\theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial(V_z)}{\partial z} \qquad \textbf{(I.21)}$$

-Dans le système en **coordonnées sphériques**

$$div(\vec{V}) = \vec{\nabla}.\vec{V} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2\,V_r)}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial(\sin\theta\,V_\theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial V_\varphi}{\partial \varphi} \qquad \textbf{(I.22)}$$

I.4.5.L'opérateur rotationnel : (Rotationnel d'un champ vectoriel) :

Le **rotationnel** noté $\overrightarrow{rot}(\vec{V})$ est un opérateur agissant sur un champ de vecteurs $\vec{V}$ (*M*) pour former un champ vectoriel. L'expression de cet opérateur dépend du système de coordonnées que l'on adopte.

-On peut écrire dans le système en **coordonnées cartésienne :**

$$\overrightarrow{rot}(\vec{v}) = \vec{\nabla}\times\vec{V} = \left[\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}\right]\overrightarrow{e_x} + \left[\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}\right]\overrightarrow{e_y} + \left[\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\right]\overrightarrow{e_z} \qquad \textbf{(I.23)}$$

-Dans le système en coordonnées polaires

$$\overrightarrow{rot}(\vec{V}) = \vec{\nabla}\times\vec{V} = \frac{1}{r}\left(\frac{\partial(r\,V_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial(V_r)}{\partial \theta}\right)\overrightarrow{e_z} \qquad \textbf{(I.24)}$$

-Dans le système en **coordonnées cylindriques**

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\vec{V}) = \vec{\nabla}\times\vec{V} = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial V_z}{\partial \theta} - \frac{\partial(V_\theta)}{\partial z}\right)\overrightarrow{e_r} + \left(\frac{\partial V_r}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial r}\right)\overrightarrow{e_\theta} + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial(r\,V_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial V_r}{\partial \theta}\right)\overrightarrow{e_z} \qquad \textbf{(I.25)}$$

-Dans le système en **coordonnées sphériques**

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\vec{V}) = \vec{\nabla}\times\vec{V} = \frac{1}{r\sin\theta}\left(\frac{\partial(\sin\theta\,V_\varphi)}{\partial \theta} - \frac{\partial V_\theta}{\partial \varphi}\right)\overrightarrow{e_r} + \frac{1}{r}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial V_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial(r\,V_\varphi)}{\partial r}\right)\overrightarrow{e_\theta} + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial(r\,V_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial V_r}{\partial \theta}\right)\overrightarrow{e_\varphi} \qquad \textbf{(I.26)}$$

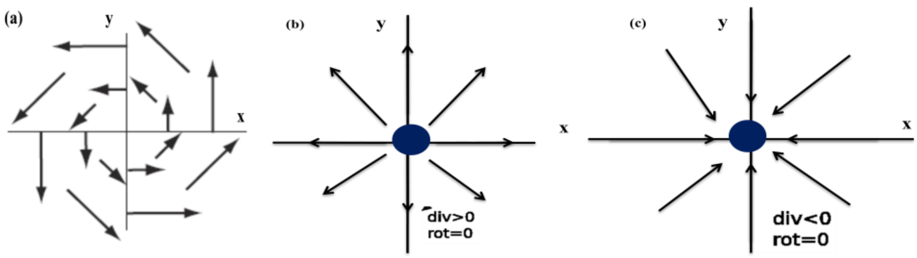

Figure ***I.1.*** *Divergence nulle et un rotationnel non nul (1.a), Divergence non nulle est positive mais un rotationnel nul (1.b), Divergence non nulle est négative mais un rotationnel nul (1.c)*

I.4.6. Laplacien scalaire:

f étant d'une fonction scalaire de point, on appelle laplacien scalaire de *f*, noté Δf ou *lap*(*f*) la divergence du gradient de *f* est défini par : $\Delta \mathbf{f} = \vec{\nabla}(\vec{\nabla}\,\mathbf{f}) = \mathbf{div}[\overrightarrow{\mathbf{grad}}(\mathbf{f})] = \nabla^2(\mathbf{f})$ **(I.27)**

∇^2 se lit «del de»

-Dans un système de **coordonnées cartésiennes,** il s'écrit :

$$\Delta f = \vec{\nabla}^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \mathrm{div}\,(\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,f) \qquad \textbf{(I.28)}$$

-Dans un système de **coordonnées polaires**, il s'écrit:

$$\Delta f = \frac{1}{r}\left(\frac{\partial\left(\frac{r\partial f}{dr}\right)}{\partial r}\right)\overrightarrow{e_r} + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial\theta^2}\right)\overrightarrow{e_\theta} \qquad \text{(I.29)}$$

Dans un système de **coordonnées cylindriques** :

$$\Delta f = \frac{1}{r}\left(\frac{\partial\left(\frac{r\partial f}{dr}\right)}{\partial r}\right)\overrightarrow{e_r} + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial\theta^2}\right)\overrightarrow{e_\theta} + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\right)\overrightarrow{e_z} \qquad \text{(I.30)}$$

Dans un système de **coordonnées sphériques**:

$$\Delta f = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial f}{\partial r}\right)\overrightarrow{e_r} + \frac{1}{r^2.\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\,\frac{\partial f}{\partial\theta}\right)\overrightarrow{e_\theta} + \frac{1}{r^2.\sin^2\theta}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial\varphi^2}\right)\overrightarrow{e_\varphi} \qquad \text{(I.31)}$$

I.4.7.Laplacien vectoriel:

Le laplacien vectoriel (*noté* $\vec{\Delta}$ ou $\overrightarrow{lap}$)d'un champ vectoriel $\vec{v}$ est un champ vectoriel défini par : $\vec{\Delta}\vec{V} = \overrightarrow{\mathbf{grad}}[\mathbf{div}(\vec{V})] - \overrightarrow{\mathbf{rot}}[\overrightarrow{\mathbf{rot}}(\vec{V})] = \nabla^2\vec{V} = \vec{\nabla}\vec{\nabla}.(\vec{V}) - \vec{\nabla}\times[\vec{\nabla}\times\vec{V}]$ **(I.32)**

En coordonnées cartésiennes, on peut écrire $\Delta\vec{V} = (\Delta V_x\,;\Delta V_y\,;\Delta V_z)$ ou Δ est le Laplacien scalaire; ce n'est pas vrai dans les autres systèmes de coordonnées(cylindriques et sphériques).

$$\vec{\Delta}\begin{cases}\Delta V_x = \frac{\partial^2 V_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial z^2}\\ \Delta V_y = \frac{\partial^2 V_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_y}{\partial z^2}\\ \Delta V_z = \frac{\partial^2 V_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_z}{\partial z^2}\end{cases} \qquad \text{(I.33)}$$

Figures I.12.3.4.5 *Systèmes en coordonnées cartésiennes**,** cylindriques, polaire et sphériques*

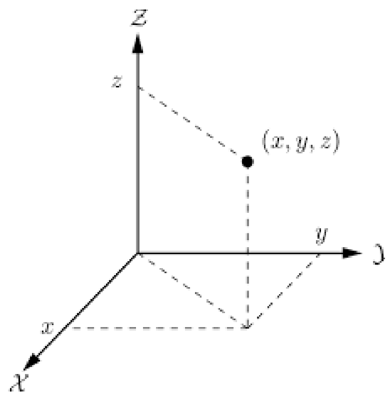

*Figure **I.2.** Système de coordonnées cartésienne*

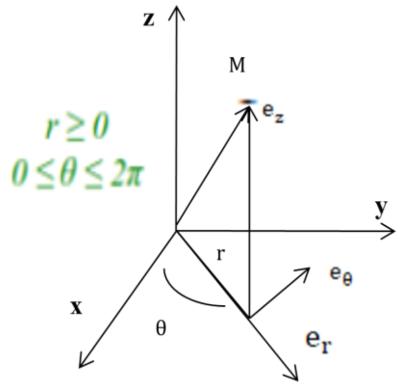

*Figure **I.3.**Système de coordonnées cylindriques*

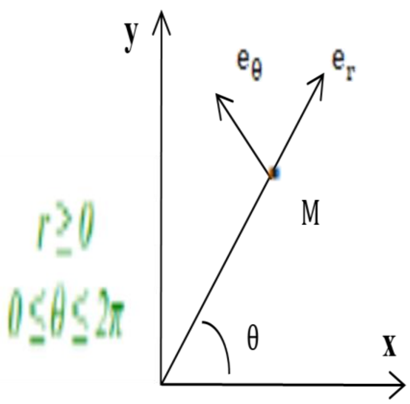

*Figure **I.4.**Système de coordonnées polaires*

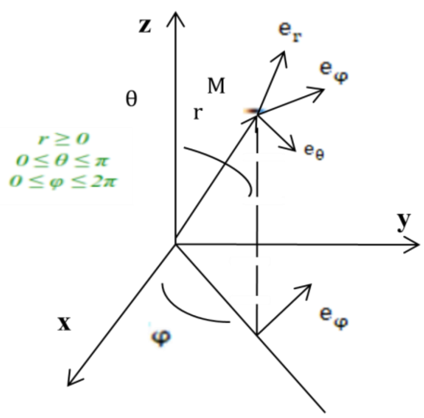

*Figure **I.5.**Système de coordonnées sphériques*

I.5. Formules mathématiques très utiles:

Mentionnons quelques formules mathématiques de ces opérateurs.

Le rotationnel d'un gradient est nul: $\overrightarrow{\mathbf{rot}}\left(\overrightarrow{\mathbf{grad}}\,\mathbf{f}\right) = \vec{\boldsymbol{\nabla}} \wedge \left(\vec{\boldsymbol{\nabla}}\,\mathbf{f}\right) = \vec{\mathbf{0}}$ **(I.34)**

La divergence d'un rotationnel d'un champ est toujours est nulle :

$$\mathbf{div}\left(\overrightarrow{\mathbf{rot}}\vec{\mathbf{V}}\right) = \left(\vec{\boldsymbol{\nabla}} \wedge \vec{\mathbf{V}}\right) = \mathbf{0} \quad \textbf{(I.35)}$$

Divergence et rotationnelle du produit ($\mathrm{f}\,\vec{\mathrm{V}}$) d'un champ scalaire f par un champ vectoriel $\vec{\mathrm{V}}$:

$$\mathbf{div}\left(\mathbf{f}\vec{\mathbf{V}}\right) = \mathbf{f}\mathbf{div}\,\vec{\mathbf{V}} + \overrightarrow{\mathbf{grad}}\mathbf{f}.\,\vec{\mathbf{V}}\overrightarrow{\mathbf{rot}}\left(\mathbf{f}\vec{\mathbf{V}}\right) = \mathbf{f}\overrightarrow{\mathbf{rot}}\,\vec{\mathbf{V}} + \overrightarrow{\mathbf{grad}}\mathbf{f} \wedge \vec{\mathbf{V}} \quad \textbf{(I.36)}$$

Cas particulier: si $\vec{\mathrm{V}}$ est un vecteur fixe indépendant des coordonnées de l'espace :

$$\mathbf{div}\left(\mathbf{f}\vec{\mathbf{V}}\right) = \overrightarrow{\mathbf{grad}}\mathbf{f}.\,\vec{\mathbf{V}}\overrightarrow{\mathbf{rot}}\left(\mathbf{f}\vec{\mathbf{V}}\right) = \overrightarrow{\mathbf{grad}}\mathbf{f} \wedge \vec{\mathbf{V}} \quad \textbf{(I.37)}$$

Divergence d'un produit vectoriel : $\mathbf{div}\left(\vec{\mathbf{V}} \wedge \vec{\mathbf{u}}\right) = \vec{\mathbf{u}}\overrightarrow{\mathbf{rot}}\,\vec{\mathbf{V}} - \vec{\mathbf{V}}\overrightarrow{\mathbf{rot}}\,\vec{\mathbf{u}}$ **(I.38)**

Carré d'un champ vectoriel: $\overrightarrow{\mathbf{grad}}(\vec{\mathbf{V}}^2) = \vec{\mathbf{V}} \wedge \overrightarrow{\mathbf{rot}}\,\vec{\mathbf{V}} + \left(\vec{\mathbf{V}} \wedge \overrightarrow{\mathbf{grad}}\right)\vec{\mathbf{V}}$ **(I.39)**

Rotationnel du rotationnel d'un champ: $\overrightarrow{\mathbf{rot}}\left(\overrightarrow{\mathbf{rot}}\vec{\mathbf{V}}\right) = \overrightarrow{\mathbf{grad}}\left(\mathbf{div}\,\vec{\mathbf{V}}\right) - \Delta\vec{\mathbf{V}}$ **(I.40)**

I.6. Théorème de Stokes-Théorème de Gauss :

I.6.1. Circulation d'un champ vectoriel $\vec{\mathbf{V}}$ sur un contour :

On définit la circulation d'un champ vectoriel $\vec{\mathrm{V}}$ sur un contour (C) entre le point de départ A et le point d'arrivée B par l'intégrale curviligne:

$$\mathrm{C}_{\overrightarrow{\mathrm{AB}}}\left(\vec{\mathrm{V}}\right) = \int_{\overrightarrow{\mathrm{AB}}} \vec{\mathrm{V}}\,.\,\overrightarrow{\mathrm{dl}} \quad \textbf{(I.41)}$$

Où $\overrightarrow{dl}$ désigne un élément de contour ($\overrightarrow{dl}$ est tangent au contour en tout point).

Remarque :

1-Si le contour est fermé, alors $A = B$ et le signe $\int$ est barré d'un rond et la circulation s'écrit: $C\left(\vec{\mathrm{V}}\right) = \oint \vec{\mathrm{V}}.\,\overrightarrow{\mathrm{dl}}$ **(I.42)**

2-Si $\vec{\mathrm{V}}$ est un champ défini par: $\vec{V} = \overrightarrow{grad}f$ où f est une fonction "potentiel", alors le champ vectoriel $\vec{\mathrm{V}}$ dont la circulation est nulle sur tout contour fermé est dit à circulation conservative. Par exemple: champ électrostatique, champ de pesanteur ...

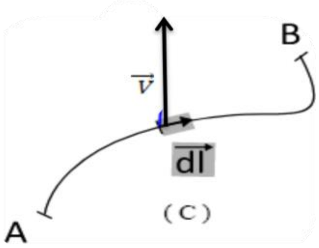

*Figure **I.6**.Circulation sur un contour*

I.6.2.Flux(ϕ) d'un champ vectoriel $\vec{\mathbf{V}}$ sur une surface:

Le flux d'un vecteur $\vec{\mathrm{V}}$ à travers une surface (S) est donné par l'intégrale double:

$$\phi_{/S}\left(\vec{\mathrm{V}}\right) = \iint_{(s)} \vec{\mathrm{V}}\,.\,\overrightarrow{\mathrm{dS}} \quad \textbf{(I.43)}$$

C'est-à-dire, le flux d'un champ vectoriel $\vec{\mathrm{V}}$ à travers une surface(S) est la mesure du nombre de lignes dit champ traversant cette surface.

Où $\overrightarrow{dS}$ désigne un élément de surface et $\vec{n}$ désigne la normale à la surface ($\overrightarrow{dS} = \vec{n}\,dS$)

Alors: $\phi_{/S}\left(\vec{\mathrm{V}}\right) = \iint_{(s)} \vec{V}.\vec{n}\,dS$ **(I.44)**

Remarque:

Quand il s'agit d'une surface fermée par contre (C), l'intégrale est dénotée $\oiint_S$, le vecteur $\vec{n}$ est orienté vers l'extérieur de la surface.

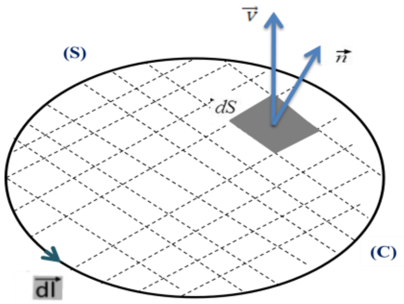

*Figure **I.7**. Surface fermée par contre (C)*

I.6.3.Théorèmes

I.6.3.1. Théorème de Stockes

Soit(C) un contour fermé et orienté et (S) une surface s'appuyant sur ce contour.

Le théorème de Stokes s'énonce:

La circulation d'un vecteur $\vec{V}$ le long de ce contour fermé est égal au flux du rotationnel du champ de vecteur $\vec{V}$ à travers la surface (S) s'appuyant sur le contour(C).

$$C(\overrightarrow{V}) = \quad \phi_{/s}(\overrightarrow{rot}\,\vec{V}) \qquad \textbf{(I.45)}$$

$$C(\overrightarrow{V}) = \oint \vec{V}.d\vec{l} = \iint_{(s)} \overrightarrow{rot}\,\vec{V}.\vec{n}\,.dS \qquad \textbf{(I.46)}$$

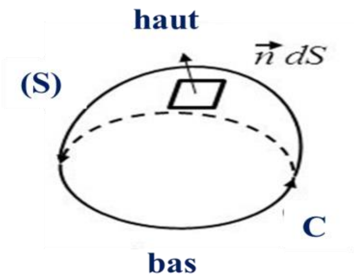

*Figure **I.8**. Un contour(C) fermé et orienté et (S) une surface s'appuyant sur (C)*

I.6.3.2. Théorème de Gauss-Ostrogradski (Ou théorème de la divergence) :

Soit une surface fermée entourant un volume Γ .le théorème d'Ostrogradski s'énonce :

Le flux d'un champ vectoriel $\vec{V}$, à travers une surface fermée (S) est égal à l'intégrale triple de sa divergence dans le volume (Γ) limité par la surface fermée (S):

$$\oiint_{(S)} \vec{V}.\vec{n}\,.dS = \iiint_{(\Gamma)} div\,\vec{V}\,\vec{n}\,.d\Gamma \qquad \textbf{(I.47)}$$

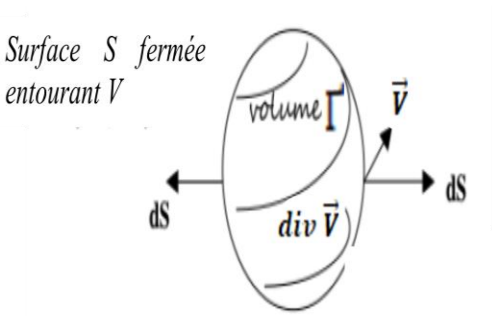

*Figure **I.9**. Illustration du théorème d'Ostrogradski*