Les modèles dynamiques déterministes

1.0

HAOULI Zouina

1.0

09/12/2024

Table des matières

I Chapitre3 :Les modèles dynamiques déterministes

Les modèles dynamiques déterministes en agronomie environnementale sont des outils essentiels pour simuler, comprendre et prédire le comportement de systèmes agricoles et environnementaux sous l'influence de divers facteurs. Ces modèles permettent aux chercheurs, agronomes et gestionnaires de mieux appréhender les interactions complexes entre les plantes, le sol, l'eau, le climat et d'autres variables environnementales.

Un modèle dynamique déterministe est un modèle mathématique qui décrit comment un système évolue au cours du temps de manière prédéterminée, sans incertitudes intégrées dans ses équations de base. En agronomie, ces modèles sont utilisés pour prévoir des phénomènes comme la croissance des cultures, l'érosion des sols, ou la dynamique de nutriments dans un champ.

Exemples de systèmes dynamiques en agronomie

- ***Croissance des plantes*** : simulation de la croissance des cultures en fonction des ressources disponibles (eau, nutriments, lumière).
- ***Évolution de la matière organique dans le sol*** : prédire comment la matière organique se décompose et contribue à la fertilité des sols.
- ***Gestion de l'eau*** : modélisation des cycles de l'eau pour optimiser l'irrigation.
- ***Cycle de l'azote*** : modélisation de la circulation de l'azote dans le sol pour éviter les pertes et l'eutrophisation.

1. Structure des modèles dynamiques

Un modèle dynamique déterministe en agronomie repose généralement sur des équations différentielles ordinaires (EDO) qui expriment les changements dans le système étudié.

Composants d'un modèle dynamique

1.Variables d'état : représentent les quantités qui évoluent avec le temps (ex : biomasse des plantes, concentration de nutriments).

2.Paramètres : valeurs fixes qui caractérisent les processus (ex : taux de photosynthèse, coefficients de décomposition).

3.Conditions initiales : valeurs initiales des variables d'état.

4.Forçages externes : facteurs environnementaux comme la température, les précipitations, ou la luminosité.

Exemple : Exemple : Modèle de croissance d'une culture

Un modèle simple pour la croissance des cultures pourrait prendre la forme de l'équation :

$$\frac{dB}{dt} = P(T, L, N) - R(B)$$

où :

- B est la biomasse de la culture,
- P représente la production de biomasse en fonction de la température T, de la lumière L, et de la disponibilité en nutriments N,
- R est la respiration, qui dépend de la biomasse elle-même.

1.1. Types de modèles dynamiques en agronomie

Les modèles dynamiques en agronomie environnementale peuvent être classés selon la complexité de leurs représentations et les phénomènes qu'ils cherchent à simuler.

1 Modèles simples

- Basés sur des relations empiriques ou sur des processus dominants.
- Peuvent décrire des processus spécifiques (ex : bilan hydrique simple dans un champ).

2 Modèles mécanistes

- Représentent les processus biologiques, chimiques ou physiques sous-jacents.
- Ex : modèles d'échange de gaz pour simuler la photosynthèse ou la respiration du sol.

3 Modèles intégrés

- Combinent plusieurs processus pour donner une vue d'ensemble.
- Utilisés pour simuler des interactions complexes entre cultures, climat et sol.

1.2. Applications des modèles dynamiques en agronomie environnementale

1 Prévision de la productivité des cultures

Les modèles dynamiques permettent de prédire le rendement des cultures en fonction des pratiques agricoles et des conditions climatiques.

2 Gestion des ressources en eau et en sol

Les modèles aident à optimiser l'utilisation de l'eau (irrigation) et à prévoir les impacts des pratiques agricoles sur l'érosion et la qualité des sols.

3 Évaluation de l'impact environnemental

Ils sont également utilisés pour évaluer les émissions de gaz à effet de serre ou le ruissellement d'éléments nutritifs, contribuant ainsi à la mise en œuvre de pratiques durables.

1.3. Limites et défis des modèles dynamiques déterministes

Les modèles déterministes sont puissants, mais ils présentent certaines limites :

- ***Sensibilité aux paramètres*** : les modèles sont sensibles aux valeurs des paramètres, qui peuvent être difficiles à estimer précisément.
- ***Incertitudes environnementales*** : le manque de prise en compte des aléas climatiques et des variations biologiques peut limiter leur fiabilité.
- ***Complexité de calibration et validation*** : ces modèles nécessitent une calibration rigoureuse et une validation avec des données expérimentales.

II Les équations différentielles (ED) et les équations aux dérivées partielles (EDP)

Les équations différentielles (ED) et les équations aux dérivées partielles (EDP) sont des outils mathématiques puissants pour modéliser et analyser les dynamiques des systèmes biologiques, chimiques et physiques dans les sciences agronomiques et environnementales. En agronomie environnementale, elles permettent de simuler des processus tels que la croissance des cultures, la diffusion de nutriments dans le sol, et le transport de polluants dans les milieux naturels.

Les équations différentielles sont des équations qui relient une fonction avec ses dérivées, permettant ainsi de décrire comment une quantité change dans le temps ou dans l'espace. Elles se déclinent en deux grandes catégories :

1.Équations différentielles ordinaires (EDO) : impliquent des dérivées par rapport à une seule variable indépendante, souvent le temps.

2.Équations aux dérivées partielles (EDP) : impliquent des dérivées partielles par rapport à plusieurs variables indépendantes, comme le temps et l'espace.

Exemple

- ***EDO*** : croissance de la biomasse d'une culture dans le temps.
- ***EDP*** : diffusion de nutriments dans le sol en fonction de l'espace et du temps.

1. Équations différentielles ordinaires (EDO)

Les EDO sont souvent utilisées pour modéliser des processus dynamiques qui évoluent uniquement dans le temps

Exemple : Exemple : Modèle de croissance de la plante

La croissance d'une plante peut être modélisée par une EDO représentant la variation de la biomasse B(t)au cours du temps t :

$$\frac{dB}{dt} = P(B, N, T) - R(B)$$

où :

- P est la production nette de biomasse, dépendant de la quantité de nutriments N et de la température T,
- R représente la respiration de la plante.

Méthodes de résolution

La résolution des EDO peut se faire analytiquement pour des cas simples, ou numériquement pour des équations plus complexes. Les méthodes de résolution numérique incluent les méthodes d'Euler, de Runge-Kutta, et d'autres intégrateurs adaptés aux systèmes rigides.

2. Équations aux dérivées partielles (EDP)

Les EDP sont particulièrement utiles pour modéliser des processus qui évoluent à la fois dans le temps et dans l'espace. En agronomie environnementale, elles permettent de prendre en compte la répartition spatiale des variables et leurs interactions.

Exemple : Exemple d'EDP : Diffusion des nutriments dans le sol

La diffusion des nutriments dans le sol peut être modélisée par une EDP de la forme :

$$\frac{\partial C}{\partial t} = D\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} - U\frac{\partial C}{\partial x} + S$$

où :

- C(x,t) est la concentration de nutriments en fonction de la position x et du temps t,
- D est le coefficient de diffusion,
- U est la vitesse de déplacement des nutriments dans le sol,
- S est un terme de source qui peut représenter l'ajout de fertilisants.

Cette équation permet de comprendre comment les nutriments se déplacent dans le sol et sont disponibles pour les plantes

Exemple : Exemple d'EDP : Transfert de chaleur dans le sol

Un autre exemple en agronomie est le transfert de chaleur dans le sol, qui affecte la température des racines et donc la croissance des plantes. Le modèle de conduction thermique peut être décrit par une EDP :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = k\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

où :

- $T(x,t)$est la température du sol,
- k est la diffusivité thermique.

Méthodes de résolution des EDP

La résolution des EDP se fait souvent par des méthodes numériques comme les différences finies, les éléments finis, ou les volumes finis. Ces méthodes permettent d'approcher les dérivées et de résoudre l'équation dans des conditions où une solution analytique est difficile à obtenir.

3. Applications des ED et EDP en agronomie environnementale

1 Modélisation des cycles biogéochimiques

Les ED et EDP permettent de modéliser des cycles de nutriments comme l'azote et le phosphore, en prenant en compte leurs transformations et leur transport dans le sol.

2 Prédiction de la croissance des cultures

Ces équations sont également utilisées pour simuler la croissance des plantes en fonction des apports en nutriments, de la température, et de la lumière, afin d'optimiser les pratiques agricoles.

3 Érosion et transport de sédiments

Les EDP permettent de modéliser l'érosion et le transport de sédiments dans le sol, qui sont des phénomènes influencés par les précipitations, la végétation, et la topographie.

4 Transport de contaminants

Les EDP sont essentielles pour simuler la dispersion et le transport de contaminants ou de polluants dans le sol et l'eau, permettant de mieux comprendre leur impact sur l'environnement et les cultures.

4. Limites et défis

Bien que les ED et les EDP soient puissantes, elles comportent certaines limites :

- ***Sensibilité aux paramètres*** : Les valeurs des paramètres influencent fortement les résultats et peuvent être difficiles à mesurer précisément.
- ***Complexité de résolution*** : Les EDP en particulier nécessitent des méthodes numériques avancées pour des solutions précises.
- ***Incertitude et variabilité des conditions*** : Les conditions environnementales varient dans le temps et l'espace, ce qui peut rendre les modèles complexes.

III La résolution numérique d'équations différentielles (ED) et d'équations aux dérivées partielles (EDP

La résolution numérique ***d'équations différentielles (ED)*** et ***d'équations aux dérivées partielles (EDP)*** est cruciale en agronomie environnementale pour simuler des processus complexes qui n'ont souvent pas de solutions analytiques. Ces méthodes numériques permettent d'approcher les solutions en utilisant des ordinateurs pour obtenir des valeurs précises dans des conditions réelles.

La résolution numérique consiste à utiliser des méthodes discrètes pour approximer les solutions des ED et EDP sur un domaine temporel ou spatial donné. Ces méthodes transforment une équation continue en un ensemble d'équations discrètes, qu'un ordinateur peut résoudre.

Méthodes de base

Les principales méthodes numériques sont :

1.Méthodes pour les ED (temps) : méthodes d'Euler, de Runge-Kutta, etc.

2.Méthodes pour les EDP (temps et espace) : différences finies, éléments finis, volumes finis, etc.

1. Résolution numérique des équations différentielles ordinaires (EDO)

Les EDO, qui impliquent des dérivées par rapport au temps, sont utilisées pour des processus évolutifs simples en agronomie, comme la croissance d'une culture ou le changement de concentration d'un élément dans le sol.

1.1. Méthode d'Euler

La méthode d'Euler est une méthode simple et directe, consistant à approximer la dérivée par une différence finie.

Pour une ***EDO*** de la forme dydt=f(t,y) avec $y(0)=y_0$, la méthode d'Euler approxime la solution comme suit :

yn+1=yn+h·f(tn,yn)

où :

- h est le pas de temps (une valeur petite pour une meilleure précision),

- yn est l'approximation de y(t) au point tn=n·h

Avantages et limites

- Avantage : Facile à implémenter.
- Limite : Moins précis pour des pas de temps plus grands, instable pour certaines applications.

1.1.1. 2 Méthode de Runge-Kutta (RK4)

La méthode de Runge-Kutta d'ordre 4 est plus précise et souvent utilisée pour résoudre des EDO dans des simulations agronomiques.

Elle suit cette approche :

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

avec

$$k_1 = f(t_n, y_n), \quad k_2 = f(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_1), \quad k_3 = f(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_2), \quad k_4 = f(t_n + h, y_n + hk_3)$$

Avantages et limites

- Avantage : Très précis et relativement stable.
- Limite : Plus complexe et coûteux en termes de calculs.

2. Résolution numérique des équations aux dérivées partielles (EDP)

Les EDP modélisent des phénomènes dynamiques dépendant à la fois du temps et de l'espace, tels que le transport de nutriments, la diffusion de chaleur, ou la propagation de contaminants.

2.1. 1 Méthode des différences finies

La méthode des différences finies consiste à approximer les dérivées en remplaçant chaque point du domaine continu par des points discrets (maillage).

Exemple : Exemple : Équation de diffusion

Pour une équation de diffusion simple en 1D :

$$\frac{\partial C}{\partial t} = D\frac{\partial^2 C}{\partial x^2}$$

on utilise les approximations suivantes :

Dérivée temporelle (en avant) :

$$\frac{\partial C}{\partial t} \approx \frac{C_i^{n+1} - C_i^n}{\Delta t},$$

Dérivée seconde spatiale : *(cf. p.12)*

$$\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} \approx \frac{C_{i+1}^n - 2C_i^n + C_{i-1}^n}{\Delta x^2},$$

et on obtient une équation discrète pour chaque point (i,n)du maillage : *(cf. p.12)*

$$C_i^{n+1} = C_i^n + D\frac{\Delta t}{\Delta x^2}(C_{i+1}^n - 2C_i^n + C_{i-1}^n)$$

2.1.1. 2 Méthode des éléments finis

La méthode des éléments finis divise le domaine en éléments (segments en 1D, triangles en 2D) et utilise des fonctions de forme pour approximer la solution sur chaque élément.

Avantages et limites

- Avantage : Flexible pour des domaines complexes, bonne précision.
- Limite : Plus complexe à mettre en place, nécessite souvent des logiciels spécialisés.

a) 3 Méthode des volumes finis

Cette méthode est utilisée pour les problèmes de conservation (ex : conservation de la masse, de la chaleur). Elle divise le domaine en volumes de contrôle et intègre les équations sur chaque volume, conservant ainsi la quantité étudiée.

Exemple : Exemple : Équation de transport-réaction

Pour une équation de transport-réaction en 1D :

$$\frac{\partial C}{\partial t} + u\frac{\partial C}{\partial x} = D\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + R(C)$$

- où ***u*** est la vitesse de transport et ***R(C)*** une réaction, la méthode des volumes finis intégrera cette équation sur chaque volume pour conserver la masse de ***C*** dans tout le domaine.

i Applications en agronomie environnementale

1 Diffusion de nutriments dans le sol

La diffusion de nutriments comme le phosphore peut être simulée par une EDP de diffusion, en utilisant des différences finies pour prédire comment les nutriments se déplacent à travers différentes couches du sol.

2 Transfert de chaleur dans le sol

En utilisant la méthode des éléments finis, on peut modéliser le transfert de chaleur dans le sol, qui affecte les racines et influence la croissance des plantes.

3 Transport de polluants

La méthode des volumes finis est souvent appliquée pour simuler le transport de polluants dans l'eau ou dans le sol, prenant en compte les réactions chimiques qui pourraient les transformer.

3. Choix des méthodes et défis

Le choix de la méthode dépend de plusieurs facteurs :

- Précision requise : Les méthodes de Runge-Kutta sont souvent préférées pour leur précision, tandis que les différences finies sont souvent un bon compromis entre précision et simplicité.
- Ressources de calcul : Certaines méthodes, comme les éléments finis, sont plus exigeantes en calcul et en mémoire.
- Complexité du domaine : Les éléments finis ou les volumes finis sont plus adaptés aux domaines complexes.

Défis

- Stabilité numérique : Certaines méthodes peuvent devenir instables pour des pas de temps ou des maillages trop grands.
- Sensibilité aux paramètres : Les résultats peuvent être fortement affectés par la précision des paramètres, nécessitant des ajustements basés sur des données expérimentales.

IV Les modèles dynamiques en agro-environnementale

Un modèle dynamique en agronomie ou en sciences environnementales est basé sur des équations différentielles ou des équations aux dérivées partielles (ED/EDP) pour capturer l'évolution de systèmes naturels dans le temps. Ces modèles peuvent être déterministes, où chaque paramètre est fixé, ou stochastiques, lorsqu'ils incluent des facteurs aléatoires pour capturer les incertitudes.

1. Modèles de croissance des cultures

Ces modèles décrivent le développement et le rendement des cultures en fonction des ressources disponibles et des conditions environnementales. Ils sont essentiels pour optimiser les pratiques agricoles et maximiser les rendements.

Exemple : Exemple 1: Modèle STICS (Simulateur multidisciplinaire pour les cultures standard)

Le modèle STICS est un modèle déterministe qui simule la croissance d'une culture en fonction de divers facteurs tels que le climat, le sol, et les pratiques agricoles.

Variables principales :

- Biomasse et rendement des plantes.
- Croissance des racines : dépend de la disponibilité en eau et en nutriments.
- Cycle de l'azote : absorption de l'azote du sol par les plantes, avec retour de l'azote dans le sol à la décomposition des résidus.

Utilisations

STICS est utilisé pour :

- Prédire les rendements des cultures.
- Optimiser la fertilisation et l'irrigation.
- Évaluer l'impact des changements climatiques sur la productivité agricole.

Exemple : Exemple2 : Modèle APSIM (Agricultural Production Systems Simulator)

APSIM est un modèle plus complexe qui simule le développement des cultures et intègre les interactions entre les plantes, le sol et le climat.

Composants

- Croissance de la plante : simulation de la photosynthèse, de la respiration, et de l'allocation de biomasse.
- Systèmes de sol : modélisation de la disponibilité en eau et en nutriments, en prenant en compte la matière organique et la décomposition.
- Interactions climatiques : influence des précipitations, de la température et de l'ensoleillement.

Applications

APSIM est utilisé pour des simulations à long terme, notamment dans les recherches sur la résilience des cultures aux changements climatiques et pour tester différentes pratiques agricoles.

2. Modèles de cycles de nutriments

Les modèles de cycles de nutriments décrivent les transformations des éléments nutritifs dans le sol et leur circulation entre le sol, les plantes et l'atmosphère. Ces modèles permettent d'optimiser la fertilisation et de réduire l'impact environnemental des excès de nutriments.

Exemple : Exemple : Modèle CENTURY

CENTURY est un modèle qui simule les cycles du carbone, de l'azote, du phosphore et du soufre dans les écosystèmes agricoles et naturels.

Variables clés

- Carbone du sol : influencé par les résidus de culture et la matière organique.
- Azote : transformation de l'azote dans le sol (minéralisation, nitrification, dénitrification) et absorption par les plantes.
- Phosphore et soufre : cycles influencés par les pratiques agricoles et les conditions du sol.

Utilisations

CENTURY est largement utilisé pour :

- Évaluer l'impact de l'agriculture sur le stockage du carbone.
- Optimiser la fertilisation en fonction des cycles de nutriments.
- Simuler les effets des pratiques agricoles sur la qualité du sol.

3. Modèles de transport et de diffusion

Les modèles de transport et de diffusion simulent le déplacement de substances (eau, nutriments, polluants) dans le sol et l'eau. Ces modèles sont essentiels pour évaluer la qualité de l'eau, prévenir la pollution des nappes phréatiques, et optimiser la distribution de l'irrigation.

Exemple : Exemple 1 : Modèle HYDRUS

Le modèle ***HYDRUS*** simule le mouvement de l'eau, des solutés et des nutriments dans le sol. Il utilise des EDP pour représenter le transport vertical et horizontal dans des sols hétérogènes.

Variables

- Humidité du sol : simulation du mouvement de l'eau en fonction de la porosité et des caractéristiques du sol.
- Transport de solutés : diffusion des éléments dissous dans l'eau (nutriments ou polluants).
- Absorption racinaire : évaluation de l'absorption d'eau par les racines des plantes.

Applications

HYDRUS est utilisé pour :

- Étudier la pollution des sols par les pesticides et les engrais.
- Optimiser les pratiques d'irrigation.
- Analyser la disponibilité en eau dans des conditions de sécheresse.

Exemple : Exemple 2 : Modèle SWAT (Soil and Water Assessment Tool)

SWAT est un modèle qui simule le cycle hydrologique et le transport des nutriments et des sédiments à l'échelle d'un bassin versant.

Composants

- Cycle de l'eau : inclut les précipitations, le ruissellement, l'évapotranspiration, et l'infiltration.
- Transport de nutriments et de sédiments : capture le transport des éléments dans les rivières et les sols.
- Gestion de l'utilisation des terres : impact des cultures, des pâturages, et des zones forestière

Applications

SWAT est utilisé pour :

- Prévoir l'impact de l'agriculture sur la qualité de l'eau.
- Étudier la dégradation des sols et l'érosion.
- Évaluer les impacts des changements d'utilisation des terres.

4. Modèles hydrologiques

Les modèles hydrologiques représentent le cycle de l'eau dans un bassin versant ou à l'échelle d'une exploitation agricole. Ces modèles sont cruciaux pour la gestion de l'irrigation, la préservation des ressources en eau, et l'analyse des risques liés aux inondations et à la sécheresse.

Exemple : Exemple : Modèle WEAP (Water Evaluation and Planning System)

WEAP est un modèle qui combine les aspects de gestion de l'eau avec des simulations hydrologiques pour évaluer l'équilibre hydrique à l'échelle d'un bassin versant.

Composants

- Cycle de l'eau : simulation des flux d'eau (précipitations, infiltration, ruissellement).
- Utilisation de l'eau : évaluation de la demande en eau pour l'irrigation, l'industrie, et l'approvisionnement domestique.
- Ressources en eau : prises en compte des réservoirs, des rivières et des nappes phréatiques.

Applications

WEAP est utilisé pour :

- Planifier et optimiser l'utilisation de l'eau dans les zones agricoles.
- Évaluer les scénarios de pénurie d'eau et les impacts du changement climatique.
- Prédire les effets des politiques de gestion de l'eau sur les écosystèmes et l'agriculture.

V Activités corrigés

1. TD4

Exercice 1:la méthode d'Euler appliquée à une problématique agroenvironnementale.

On considère un champ agricole où un pesticide est appliqué à la surface du sol. Le pesticide se dégrade dans le sol selon une constante de dégradation k (en jour^{-1}). La variation de la concentration C (en mg/L) du pesticide dans le sol au cours du temps peut être modélisée par l'équation différentielle suivante : *(cf. p.18)*

$$\frac{dC}{dt} = -k \cdot C$$

On prend les valeurs suivantes pour cet exercice :

- La concentration initiale du pesticide dans le sol est C_0=50 mg/L.
- La constante de dégradation est k=0.1 jour^{-1}.
- On souhaite estimer la concentration du pesticide après 10 jours, en utilisant la méthode d'Euler avec un pas de temps Δt=1 jour.

Questions

1-Utilisez la méthode d'Euler pour calculer la concentration du pesticide dans le sol pour chaque jour, jusqu'à 10 jours.

2-Comparez la solution obtenue avec la solution analytique de l'équation différentielle donnée par *(cf. p.18)*

$$C(t) = C_0 \cdot e^{-k \cdot t}$$

Solution

Utilisation de la méthode d'Euler

La méthode d'Euler pour l'équation différentielle *(cf. p.18)*

$$\frac{dC}{dt} = -k \cdot C$$

peut être appliquée avec la formule suivante :

$$C_{n+1} = C_n + \Delta t \cdot (-k \cdot C_n)$$

où Cn est la concentration au temps tn.

Étapes de calcul :

- Initialisation : C_0=50 mg/L
- Pas de temps Δt=1 jour
    - Constante de dégradation k=0.1 jour^{-1}

Calculons la concentration pour chaque jour jusqu'à 10 jours.

Solution analytique

La solution analytique est donnée par : *(cf. p.19)*

$$C(t) = 50 \cdot e^{-0.1 \cdot t}$$

Voici les valeurs calculées avec la méthode d'Euler et la solution analytique pour les comparer.

Jour	C (Euler)	C (Analytique)
0	50	50
1	45	45.24
2	40.5	40.82
3	36.45	36.74
4	32.81	32.97
5	29.53	29.51
6	26.58	26.32
7	23.93	23.41
8	21.53	20.74
9	19.37	18.31
10	17.44	16.10

2. TD5

exercice1 : la méthode de Runge-Kutta d'ordre 4 (RK4) appliquée à une problématique en agronomie environnementale

Modélisation de la croissance d'une plante dans un sol pollué

On modélise la croissance d'une plante par l'équation différentielle suivante :

$$\frac{dy}{dt} = r \cdot y \cdot \ 1 - \frac{y}{K} \ - P \cdot y$$

où :

- y(t) est la biomasse de la plante (en g/m^2) à l'instant t (en jours),

- $r=0.1$est le taux de croissance intrinsèque (en jours^{-1}),
- K=1000K = 1000K=1000 est la capacité maximale du sol (en g/m^2),
- P=0.02 est le taux de pollution affectant la croissance (en jours^{-1}).

Conditions initiales :

À t=0, la biomasse initiale est y(0)=100g/m^2.

Objectif :

1.Utilisez la méthode de Runge-Kutta d'ordre 4 (RK4) pour résoudre cette équation différentielle sur l'intervalle t∈ [0,50] avec un pas h=5ours.

2.Tracez la courbe y(t) pour visualiser l'évolution de la biomasse.

Solution guidée :

Formule de RK4 :

À chaque étape, on calcule les termes suivants *(cf. p.20)*

$$k_1 = h \cdot f(t_n, y_n)$$
$$k_2 = h \cdot f(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_1}{2})$$
$$k_3 = h \cdot f(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_2}{2})$$
$$k_4 = h \cdot f(t_n + h, y_n + k_3)$$

La valeur suivante est donnée par :

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

Implémentation et calculs :

Calculez y(t) en itérant avec RK4.

Solution

Voici une implémentation pas à pas de la méthode :

Étape 1 : Définir f(t,y)

La fonction à résoudre est : *(cf. p.20)*

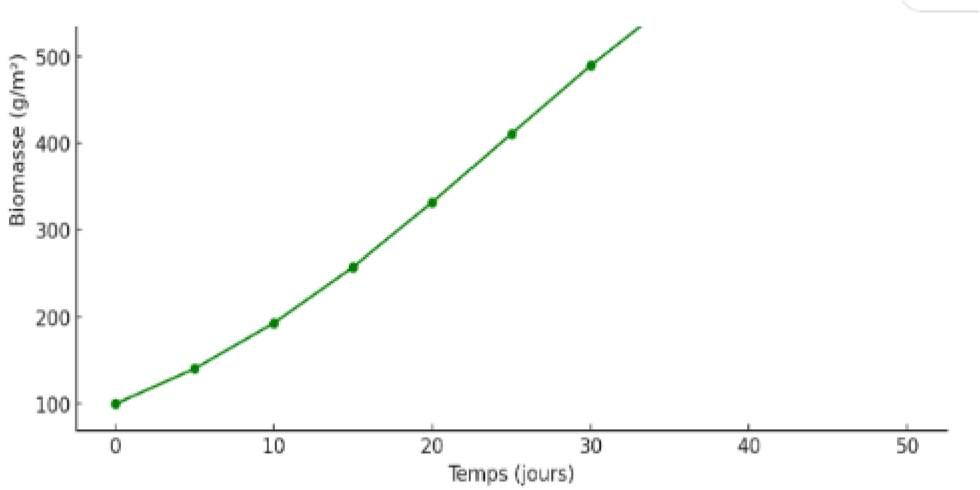
$$f(t, y) = r \cdot y \cdot \quad 1 - \frac{y}{K} \quad - P \cdot y$$

Étape 2 : Implémentation avec h=5h = 5h=5

Calculez les termes k1,k2,k3,k4 à chaque itération pour t∈[0,50].

Étape 3 : Courbe

Tracez y(t)en utilisant un logiciel comme Python ou Excel. *(cf. p.21)*



Voici la courbe montrant l'évolution de la biomasse de la plante (y(t) en fonction du temps, calculée à l'aide de la méthode de Runge-Kutta d'ordre 4 avec un pas de h=5 jours.

La courbe illustre comment la biomasse initiale augmente rapidement au début, puis ralentit à mesure qu'elle s'approche de la capacité maximale du sol (K=1000), tout en étant impactée par le taux de pollution (P=0.02).

3. TD6

exercice sur la résolution numérique des équations aux dérivées partielles (EDP) à l'aide de la méthode des différences finies dans un contexte agroenvironnemental :

Diffusion d'un polluant dans le sol

On modélise la diffusion d'un polluant dans une couche de sol homogène par l'équation de la diffusion 1D : *(cf. p.21)*

$$\frac{\partial C}{\partial t} = D\frac{\partial^2 C}{\partial x^2}$$

où :

- C(x,t)est la concentration du polluant (mg/m^3) à la profondeur x (m) et au temps t (s),
- D=0.01 m^2/s est le coefficient de diffusion.

Conditions initiales :

La concentration initiale est donnée par : *(cf. p.21)*

$$C(x,0) = \begin{matrix} 100 & \text{si } 0.4 \leq x \leq 0.6, \\ 0 & \text{ailleurs.} \end{matrix}$$

Conditions aux limites :

La concentration est nulle aux frontières : *(cf. p.22)*

$$C(0,t) = C(1,t) = 0 \quad \forall t.$$

Objectif :

1.Utilisez la méthode des différences finies explicite pour résoudre cette EDP sur l'intervalle x∈[0,1]m et t∈[0,10] s.

2.Prenez Δx=0.1 m et Δt=0.01 s. Vérifiez que le critère de stabilité de la méthode est respecté.

Tracez l'évolution de la concentration C(x,t)à différents instants (t=0,2,5,10).

Solution

Étape 1 : Approche par différences finies

L'équation discrétisée est donnée par :*image_28.png* *(cf. p.22) (cf. p.28) (cf. p.28)*

$$C_i^{n+1} = C_i^n + \lambda(C_{i+1}^n - 2C_i^n + C_{i-1}^n)$$

où : *(cf. p.22)*

$$\lambda = \frac{D\Delta t}{(\Delta x)^2},$$

C_i^n est la concentration au point i et au temps n.

Étape 2 : Vérification de la stabilité

La méthode explicite est stable si λ≤1/2.

Étape 3 : Implémentation et tracé

Utilisez un programme pour calculer C(x,t) et tracer l'évolution.

4. TD7

Exercice sur la Résolution numérique des équations aux dérivées partielles (EDP)Méthode des éléments finis

Transport d'un nutriment dans un champ agricole

Le transport d'un nutriment dans un champ agricole est modélisé par l'équation de convection-diffusion 1D : *(cf. p.22)*

$$\frac{\partial C}{\partial t} + v\frac{\partial C}{\partial x} = D\frac{\partial^2 C}{\partial x^2},$$

où :

- C(x,t) est la concentration du nutriment (mg/L) à la position x (m) et au temps t (s),
- v=0.5 m/s est la vitesse de l'écoulement,
- D=0.01 m^2/s est le coefficient de diffusion.

Domaine et conditions :

- Domaine spatial : x∈[0,1] m.
- Conditions initiales : C(x,0)=sin(πx).
- Conditions aux limites : C(0,t)=0 et C(1,t)=0.

Objectif :

1.Discrétisez cette équation à l'aide de la méthode des éléments finis en utilisant une base de fonctions linéaires sur N=5 éléments.

2.Résolvez l'équation pour t∈[0,1] s avec un pas temporel Δt=0.1s en utilisant un schéma implicite (Euler backward).

3.Tracez C(x,t)à t=0,0.5,1 s.

Solution :

Étape 1 : Formulation faible

En multipliant par une fonction test ϕi(x) et en intégrant sur le domaine spatial, on obtient la formulation faible : *(cf. p. 23)*

$$\int_0^1 \phi_i \frac{\partial C}{\partial t}\, dx + v \int_0^1 \phi_i \frac{\partial C}{\partial x}\, dx = D \int_0^1 \phi_i \frac{\partial^2 C}{\partial x^2}\, dx.$$

Étape 2 : Discrétisation

1.Approximez C(x,t)comme une combinaison linéaire des fonctions de base : *(cf. p.23)*

$$\int_0^1 \phi_i \frac{\partial C}{\partial t}\, dx + v \int_0^1 \phi_i \frac{\partial C}{\partial x}\, dx = D \int_0^1 \phi_i \frac{\partial^2 C}{\partial x^2}\, dx.$$

2-Écrivez les intégrales sous forme matricielle : *(cf. p.23)*

$$\mathbf{M}\frac{d\mathbf{C}}{dt} + \mathbf{KC} = \mathbf{0},$$

où :

- M est la matrice de masse,
- K est la matrice de rigidité (convection et diffusion).

Étape 3 : Schéma temporel

Utilisez le schéma d'Euler backward pour la discrétisation temporelle *(cf. p.24)*

$$\mathbf{M}\frac{\mathbf{C}^{n+1}-\mathbf{C}^{n}}{\Delta t}+\mathbf{K}\mathbf{C}^{n+1}=\mathbf{0}.$$

Réorganisez pour obtenir : *(cf. p.24)*

$$(\mathbf{M}+\Delta t\mathbf{K})\,\mathbf{C}^{n+1}=\mathbf{M}\mathbf{C}^{n}.$$

Étape 4 : Implémentation et tracé

Calculez C(t)à chaque pas de temps en résolvant un système linéaire et tracez les résultats.

5. TD8

Exercice :la Résolution numérique des équations aux dérivées partielles (EDP) par la Méthode des volumes finis en agroenvironnementale

Résolution d'une équation de diffusion à l'aide de la méthode des volumes finis en agroenvironnement

Contexte

On souhaite modéliser la diffusion d'un polluant dans un sol homogène en utilisant l'équation de diffusion stationnaire dans une dimension spatiale. Le sol a une longueur de L=1 m. L'équation de diffusion s'écrit : *(cf. p.24)*

$$-\frac{\partial}{\partial x}\quad D\frac{\partial C}{\partial x}\quad = S(x),$$

où :

- C(x)est la concentration du polluant (mg/L),
- D=10−6 m^2/s est le coefficient de diffusion constant,
- S(x) est une source uniforme dans le domaine (S(x)=1 mg/m^3/s.

Les conditions aux limites sont :

- C(0)=0 mg/L,
- C(L)=1 mg/L.

Objectif

Résoudre cette équation à l'aide de la méthode des volumes finis sur un maillage uniforme avec N=4volumes.

Solution

Discrétisation du domaine

Le domaine [0,L]est divisé en N=4volumes finis. Chaque volume a une largeur Δx=L/N=0.25 m. Les centres des volumes sont :

x1=0.125, x2=0.375, x3=0.625, x4=0.875.

Équation discrétisée

En appliquant la méthode des volumes finis, on intègre l'équation de diffusion sur chaque volume. Pour le volume i, on a : *(cf. p.25)*

$$-\left. D\frac{\partial C}{\partial x}\right._{x_{i-1/2}} + \left. D\frac{\partial C}{\partial x}\right._{x_{i+1/2}} = S_i\Delta x,$$

ou *(cf. p.25)*

$$\left. D\frac{\partial C}{\partial x}\right._{x_{i\pm1/2}}$$

sont les flux aux interfaces des volumes.

En utilisant une approximation aux différences finies pour le gradient : *(cf. p.25)*

$$\left. D\frac{\partial C}{\partial x}\right._{x_{i+1/2}} \approx D\frac{C_{i+1}-C_i}{\Delta x},$$

:

l'équation discrétisée devient : *(cf. p.25)*

$$-D\frac{C_i-C_{i-1}}{\Delta x} + D\frac{C_{i+1}-C_i}{\Delta x} = S_i\Delta x.$$

En réarrangeant, on obtient un système linéaire pour les concentrations Ci : *(cf. p.25)*

$$a_{i-1}C_{i-1} + a_iC_i + a_{i+1}C_{i+1} = b_i,$$

avec : *(cf. p.26)*

$$a_{i-1} = -\frac{D}{\Delta x^2},\ a_i = \frac{2D}{\Delta x^2},\ a_{i+1} = -\frac{D}{\Delta x^2},\ b_i = S_i.$$

Système matriciel

Le système est écrit en termes matriciels comme suit : *(cf. p.26)*

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & 8 & -4 & 0 \\ 0 & -4 & 8 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.25 \\ 0.25 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Résolution du système

En résolvant ce système linéaire, on obtient les valeurs des concentrations dans les volumes C1,C2,C3,C4.

Résultats numériques

Vous pouvez résoudre ce système à la main ou en utilisant un outil numérique (par exemple, Python ou MATLAB). Voici les résultats attendus :

C1≈0.125, C2≈0.375, C3≈0.625, C4=1.

Conclusion

Conclusion

Les modèles dynamiques sont des outils essentiels pour comprendre, anticiper et gérer les interactions complexes entre les plantes, le sol, et le climat en agronomie et en sciences de l'environnement. En simulant des processus comme la croissance des cultures, le cycle des nutriments, le transport de l'eau et des polluants, ils aident à orienter les pratiques agricoles vers une gestion durable des ressources naturelles, tout en minimisant les impacts environnementaux. La maîtrise de ces modèles permet d'adapter les pratiques agricoles aux défis climatiques et écologiques actuels et futurs.

Ressources annexes

>

$$C_i^{n+1} = C_i^n + \lambda(C_{i+1}^n - 2C_i^n + C_{i-1}^n)$$

Références

De Wit, C. T., & Goudriaan, J. (1978). Simulation of Ecological Processes. Pudoc, Wageningen.

6. Un ouvrage fondamental sur la simulation des processus écologiques

Godwin, D. C., & Singh, U. (1998). Modelling Nitrogen Dynamics in Plant-Soil Systems.

1.Un article sur les modèles de dynamique de l'azote.

Jean Christophe Poggiale, 2010- Modélisation mathématique en écologie, cours et exercices corrigés de , Edition Dunod.

cours et exercices corrigés

Jones, J. W., Hoogenboom, G., Porter, C. H., et al. (2003).The DSSAT cropping system model. European Journal of Agronomy.

1.Ce modèle intègre des processus liés à la croissance des cultures, les flux d'eau et les nutriments.

Monteith, J. L., & Moss, C. J. (1977).Climate and the Efficiency of Crop Production in Britain. Philosophical Transactions of the Royal Society B.

1.Une référence classique sur la modélisation des processus agroclimatiques.

Penning de Vries, F. W. T., & van Laar, H. H. (1982).Simulation of Plant Growth and Crop Production. Pudoc, Wageningen.	1.Traite spécifiquement des modèles appliqués à la production végétale.
Vanclooster, M., Viaene, P., et al. (1996). WAVE:A Mathematical Model for Simulating Water and Agrochemicals in the Soil and Vadose Environment.	1.Un modèle déterministe pour étudier les flux d'eau et de produits chimiques dans le sol.