

IV.1.Introduction :

Une onde électromagnétique est composée d'un champ électrique et un champ magnétique oscillant à la même fréquence.

Le champ électrique varie en grandeur et est orienté de façon perpendiculaire à la direction de propagation du rayonnement.

Le champ magnétique est orienté de façon perpendiculaire au champ électrique

La propagation de ces ondes s'effectue à une vitesse qui dépend du milieu considéré. Dans le vide, la vitesse de propagation est égale à 3.10^8 m.s⁻¹.

Les rayonnements électromagnétique sont présentés sous de plusieurs formes : rayons X, rayons gamma, lumière ultraviolette, lumière visible, lumière infrarouge etc.....La différence entre eux se situe dans la fréquence de l'onde électromagnétique et l'énergie qui y est liée.

IV.2. Rayonnement d'un dipôle électrique oscillant :

En électromagnétisme, Le dipôle électrique oscillant décrit les effets du mouvement oscillatoire d'une particule chargée aux alentours d'un point fixe. Il explique des phénomènes tels que le fonctionnement des antennes dipolaires ou le rayonnement thermique et la diffusion Rayleigh.

Considérons une charge +q fixe à un point O et une charge -q mobile selon l'axe Oz qui suit un mouvement sinusoïdal :

$$z = z_0 \cos \omega t = z_0 e^{-i\omega t} \quad (\text{IV.1})$$

On suppose le mouvement de +q non relativiste ; ainsi , $z_0 \omega \ll c$ et $z_0 \ll \lambda$

IV.2.1. Le potentiel :

$$\text{On a: } \vec{j} = (-q)\vec{v} \Rightarrow \vec{A}(M, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[\frac{-q\vec{v}}{r} \right]_{t-\frac{r}{c}} \quad (\text{IV.2})$$

$$\text{Avec: } \vec{v} = i \omega z(t) \vec{e}_z \quad (\text{IV.3})$$

$$\text{Et: } k = \omega/c \quad (\text{IV.4})$$

$$\text{Ainsi: } \vec{A}(M, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} i\omega \vec{P}(t) \frac{e^{-ikr}}{r} \quad (\text{IV.5})$$

$$\text{Le moment dipolaire est: } \vec{P}(t) = (-q)z(t)\vec{e}_z \quad (\text{IV.6})$$

Calculons ensuite le potentiel scalaire avec:

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial V}{\partial t} = \frac{i\omega}{c^2} \vec{V} = -\text{div}(\vec{A}) = -\vec{\nabla} \cdot \vec{A} \Rightarrow \vec{V} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} p_0 \cos \theta \frac{1+ikr}{r^2} e^{-ikr} \quad (\text{IV.7})$$

IV.2. 2. Le champ :

Nous sommes toujours en coordonnées sphériques de base $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi)$:

Le champ magnétique \vec{B} est donné par la relation :

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} i\omega \frac{p_0 e^{-ikr}}{r^2} (1 + ikr) \sin\theta \vec{e}_\varphi \quad (\text{IV.8})$$

Le champ électrique \vec{E} est donné par la relation :

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p_0 e^{-ikr}}{r^3} (2 \cos\theta(1 + ikr) \vec{e}_r + \sin\theta(1 + ikr - k^2 r^2) \vec{e}_\theta) \quad (\text{IV.9})$$

Supposons que l'on calcule les champs à grande distance» c'est-à-dire pour $r \gg \lambda$ ce qui s'écrit ainsi aussi $kr \gg 1$.

L'expression des champs se simplifie alors selon:

$$\vec{E} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} p_0 k^2 \frac{e^{-ikr}}{r} \sin\theta \vec{e}_\theta \quad (\text{IV.10})$$

$$\vec{B} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} p_0 k^2 \frac{e^{-ikr}}{r} \frac{\sin\theta}{c} \vec{e}_\varphi \quad (\text{IV.11})$$

IV.2. 3. La structure de l'onde :

On voit que le trièdre $(\vec{E}, \vec{B}, \vec{k})$ est direct avec ici k radial, et que $|\vec{B}| = \frac{|\vec{E}|}{c}$

On a donc une onde progressive mais elle n'est pas isotrope car l'amplitude varie en $\frac{\sin\theta}{r}$

On peut dire qu'on a une structure *locale* d'onde plane progressive monochromatique polarisée rectilignement; l'onde étant en réalité une onde sphérique d'émission anisotrope

- Si $\theta = 0$: il n'y a pas d'onde dans la direction du mouvement de la charge.

-Si $\theta = \frac{\pi}{2}$: l'amplitude est maximale dans une direction perpendiculaire au mouvement de la charge.

-La polarisation obtenue étant dans la direction du mouvement de la charge, on peut obtenir une polarisation autre que rectiligne en superposant deux mouvement de charge ou avec une charge ayant un mouvement autre que rectiligne.

IV.2. 4. La puissance rayonnée à travers une sphère de rayon r :

Le vecteur de Poynting $\vec{\Pi}$ associé au champ rayonné est :

$$\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} = \frac{\vec{E}^2}{\mu_0 c} \vec{e}_r = \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\right)^2 \left(\frac{p_0 k^2 \sin\theta}{r}\right)^2 \frac{\cos^2(\omega t - kr)}{\mu_0 c} \vec{e}_r \quad (\text{IV.12})$$

$$\text{La valeur moyenne est : } \langle \vec{\Pi} \rangle_{\text{temps}} = \frac{p_0^2 k^4 \sin^2 \theta}{32 \pi^2 \epsilon_0^2 \mu_0 c r^2} \vec{e}_r \quad (\text{IV.13})$$

On note que le vecteur de Poynting est radial et toujours dirigé vers l'extérieur : le système de charge en mouvement rayonne de l'énergie.

$$P_{\text{rayonnée}} = \oint \langle \vec{\Pi} \rangle \cdot d\vec{S} = \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} \int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} \langle \vec{\Pi} \rangle r^2 \sin \theta d\theta d\varphi \vec{e}_r \quad (\text{IV.14})$$

Ce qui donne, tout calcul fait :

$$P_{\text{rayonnée}} = \frac{p_0^2 \omega^4}{12 \pi \epsilon_0 c^3} \quad (\text{IV.15})$$

-On obtient bien une puissance indépendante de r , ce qui traduit la conservation de l'énergie (on a négligé tout phénomène d'absorption)

-Et aussi la puissance rayonnée est donnée par la **formule de Larmor** suivante :

$$P_{\text{rayonnée}} = \frac{\langle \dot{p}(t)^2 \rangle}{6 \pi \epsilon_0 c^3} \quad (\text{IV.16})$$

On note que cette formule est valable pour un mouvement autre que sinusoïdal.

La formule de formule de Larmor traduit le fait que toute particule accélérée rayonne de l'énergie.

IV.2. 5. Interprétation microscopique de rayonnement dipolaire :

Considérons le cas d'un dipôle constitué d'un électron et du reste de l'atome.

L'électron étant mobile, l'atome a bien un moment dipolaire donc rayonne de l'énergie si ce moment dipolaire dépend du temps. Si supposons que l'atome a été excité et qu'il ne reçoit plus d'énergie de la part de son milieu extérieur, son énergie totale devrait diminuer : c'est appelé « l'effondrement atomique ».

Pour le décrire On suppose que l'électron subit une force de frottement fluide et une force de rappel élastique. Le moment dipolaire étant proportionnel au déplacement de l'électron, alors :

$$p + 2\beta p + \omega_0^2 p = 0 \quad (\text{IV.17})$$

ω_0 et β sont la pulsation caractéristiques de résonance de l'atome et le coefficient de frottement respectivement

L'électron fait un grand nombre de tours autour du noyau avant que la distance à celui-ci diminue significativement, supposons que l'électron est faiblement amorti sur l'échelle de temps d'une période si bien que $\beta \ll \omega_0$:

La solution de l'équation différentielle:

Le discriminant Δ :

$$\Delta = 4\beta^2 - 4\omega_0^2 = 4(\beta^2 - \omega_0^2) \approx -4\omega_0^2 = (2i\omega_0)^2 \quad (\text{IV.18})$$

$$\text{Alors les racines de l'équation caractéristique sont: } u = -\beta \pm i\omega_0 \quad (\text{IV.19})$$

Avec la forme générale du moment dipolaire:

$$p(t) = e^{-\beta t} (A \cos \omega_0 t + B \sin \omega_0 t) \quad (\text{IV.20})$$

$$\text{Qui s'écrit, compte tenu de la condition initiale: } p(t) = p_0 e^{-\beta t} (A \cos \omega_0 t) \quad (\text{IV.21})$$

$$\text{Le déplacement de l'électron possède la même forme : } p = -e r \Rightarrow |r| = \frac{p(t)}{e} \quad (\text{IV.22})$$

Pour mettre en évidence l'effondrement atomique, il faut calculer l'énergie atomique (énergie mécanique: cinétique et potentielle) :

$$\text{L'énergie cinétique: } E_c = \frac{1}{2} m |r|^2 = \frac{m}{2e^2} p^2 \approx \frac{m\omega_0^2}{2e^2} p_0^2 e^{-2\beta t} \sin^2 \omega_0 t \quad (\text{IV.23})$$

On a utilisé les approximations suivantes(parce que $\beta \ll \omega_0$):

$$p = -\beta p_0 e^{-\beta t} \cos \omega_0 t - \omega_0 p_0 e^{-\beta t} \sin \omega_0 t \approx -\omega_0 p_0 e^{-\beta t} \sin \omega_0 t \quad (\text{IV.24})$$

$$\text{L'énergie potentielle : } E_p = \frac{1}{2} m \omega_0^2 r^2 = \frac{m\omega_0^2}{2e^2} p^2 = \frac{m\omega_0^2}{2e^2} p_0^2 e^{-2\beta t} \cos^2 \omega_0 t \quad (\text{IV.25})$$

Alors l'énergie mécanique est:

$$E_M = E_c + E_p = \frac{m\omega_0^2}{2e^2} p_0^2 e^{-2\beta t} (\cos^2 \omega_0 t + \sin^2 \omega_0 t) \quad (\text{IV.26})$$

$$E_M = \frac{m\omega_0^2}{2e^2} p_0^2 e^{-2\beta t} \quad (\text{IV.27})$$

L'énergie perdue par l'atome est due à la puissance rayonnée, alors :

$$\frac{dE_M}{dt} = -P_{\text{rayonnée}} \Rightarrow \frac{dE_M}{dt} = -\frac{\langle p(t)^2 \rangle}{6\pi \epsilon_0 c^3} \quad (\text{IV.28})$$

$$\text{Et } P(t) \approx -\omega_0 p_0 e^{-\beta t} \sin \omega_0 t \quad (\text{IV.29})$$

$$\text{Alors : } \ddot{p}(t) \approx -\omega_0 p_0 (-\beta e^{-\beta t} \sin \omega_0 t + \omega_0 e^{-\beta t} \cos \omega_0 t) \quad (\text{IV.30})$$

$$\ddot{p}(t) \approx -\omega_0^2 p_0 e^{-\beta t} \cos \omega_0 t \quad (\text{IV.31})$$

$$\text{Donc : } \ddot{p}(t)^2 \approx \omega_0^4 p_0^2 e^{-2\beta t} \cos^2 \omega_0 t \quad (\text{IV.32})$$

$$\text{Et } \langle \ddot{p}(t)^2 \rangle = \frac{\omega_0^4 p_0^2 e^{-2\beta t}}{2} \quad (\text{IV.33})$$

On fait ici la moyenne sur l'échelle de temps de la période de rotation de l'électron autour du noyau $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$, période qui est faible par rapport au temps caractéristique d'amortissement $\frac{1}{2\beta}$ d'où la présence de l'exponentielle dans le résultat.

$$\text{Alors : } \frac{dE_M}{dt} = -\frac{\omega_0^4}{12\pi\epsilon_0 c^3} p_0^2 e^{-2\beta t} \quad (\text{IV.34})$$

$$\text{Avec : } \frac{dE_M}{dt} = -\beta \frac{m \omega_0^2}{e^2} p_0^2 e^{-2\beta t} \quad (\text{IV.35})$$

Donc le coefficient de forttement qui modélise l'énergie perdue par l'atome est donnée par :

$$\beta = \frac{\omega_0^2 e^2}{12\pi m \epsilon_0 c^3} = \frac{\mu_0 \omega_0^2 e^2}{12\pi m c} \quad (\text{IV.36})$$

On suppose que l'atome est excité (le modèle de l'électron élastiquement lié), la solution de l'équation différentielle est: $p = p_0 e^{i\omega t}$

$$\text{Et: } p_0 = \frac{e^2 E_0}{m (\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\beta\omega)} \quad (\text{IV.37})$$

E_0 et ω sont l'amplitude du champ d'excitation et la pulsation respectivement.

Le module du moment dipolaire (dépend de la fréquence) est donné par :

$$p_0 = \frac{e^2 E_0}{m \sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2}} \quad (\text{IV.38})$$

Alors la puissance rayonnée par le dipôle étudié plus haut est en fait :

$$P_{\text{rayonnée}} = \frac{p_0^2 \omega^4}{12\pi \epsilon_0 c^3} = \frac{e^4 E_0^2 \omega^4}{12 m^2 \pi \epsilon_0 c^3 ((\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2)} \quad (\text{IV.39})$$

Remarque :

Pour les fréquences des ondes électromagnétiques visibles (celles émises par le soleil) on a aussi $\omega \ll \omega_0$, si bien qu'à ces fréquences, le module du moment dipolaire est constant, ce qui justifie l'explication de la couleur bleue du ciel, citée plus haut.

On pourrait voir le problème à l'envers: le ciel est bleu !!! C'est-à-dire, il y'a beaucoup plus de puissance émise pour les grandes fréquences ou les faibles longueurs d'ondes, ce qui prouve expérimentalement que $\omega \ll \omega_0$ (dans le cas contraire, la puissance rayonnée aurait la même valeur pour toute fréquence, et le ciel serait blanc !!!).

Alors le vecteur de Poynting moyen de l'onde excitant l'atome est :

$$\langle |\vec{\Pi}| \rangle = \epsilon_0 c \frac{E_0^2}{2} \quad (\text{IV.40})$$

Alors la puissance surfacique d'excitation (flux de ce vecteur de Poynting à travers une surface unité) est :

$$P_0 = \varepsilon_0 c \frac{E_0^2}{2} \quad (\text{IV.41})$$

La section efficace totale de diffusion de rayonnement σ est donnée par : $P_{\text{rayonnée}} = P_0 \sigma$

$$\text{Alors : } \sigma = \frac{P_{\text{rayonnée}}}{P_0} = \frac{2}{\varepsilon_0 c E_0^2} = \frac{e^4 E_0^2 \omega^4}{12 m^2 \pi \varepsilon_0 c^3 ((\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2)} \quad (\text{IV.42})$$

$$\sigma = \frac{e^4 \omega^4}{6 m^2 \pi \varepsilon_0^2 c^4 ((\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2)} \quad (\text{IV.43})$$

Pour $\omega = \omega_0$: cette section est maximale: c'est la **résonance**.

On distingue deux cas limites:

$\omega \ll \omega_0$: **La diffusion Rayleigh**: ce cas explique la couleur bleue du ciel

$$\sigma = \frac{e^4}{6 m^2 \pi \varepsilon_0^2 c^4} \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^4 \quad (\text{IV.44})$$

$\omega \gg \omega_0$: **Diffusion Thomson**

$$\sigma = \frac{e^4}{6 m^2 \pi \varepsilon_0^2 c^4} \quad (\text{IV.45})$$

Nous pouvons alors tracer les variations de cette puissance moyenne en fonction de la pulsation ω de l'onde incidente.

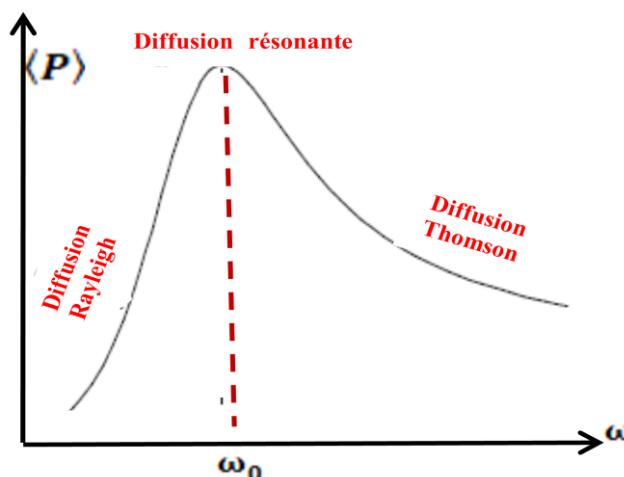


Figure IV.1. Variation de la puissance moyenne en fonction de la pulsation ω de l'onde incidente

IV.3 .Rayonnement d'une antenne, alignement d'antennes:

IV.3.1.Définition:

L'antenne dipolaire, Inventée par Heinrich Rudolph Hertz vers 1886, celle-ci est constituée de deux brins métalliques, alimentée en son milieu et conçue pour transmettre ou recevoir de l'énergie électromagnétique.

L'antenne dipolaire est le plus simple à étudier d'un point de vue analytique.

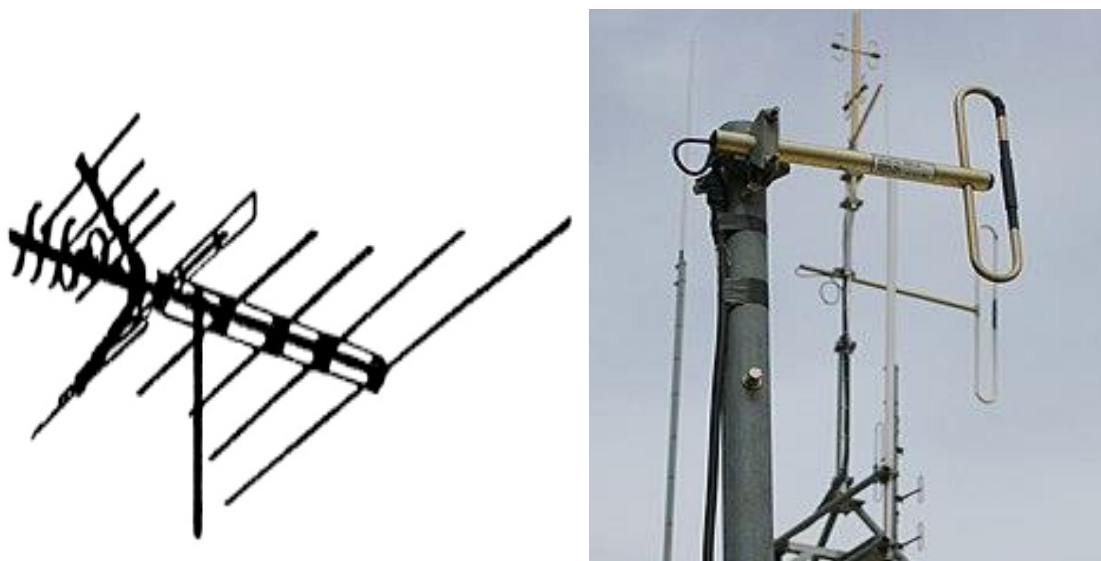


Figure IV.2. Antennes

IV.3. 2. Dipôle court, Dipôle demi-onde :

Considérons ici un fil parcouru par un courant, et cherchons le champ électromagnétique rayonné à grande distance. si l est la longueur du fil, on se placera comme pour le rayonnement d'un dipôle à une distance $r \gg l$. Il y'a deux cas :

-La longueur l est faible devant la longueur d'onde: « le cas de l'antenne dans l'approximation des régimes quasi-stationnaire : Dipôle court »

-La longueur l n'est pas négligeable devant la longueur d'onde « le cas particulier l'antenne demi-onde »

a-Dipôle court :

Un dipôle est formé par deux conducteurs de longueur totale l très petite comparée à la longueur d'onde λ . Les deux conducteurs sont alimentés au centre du dipôle.

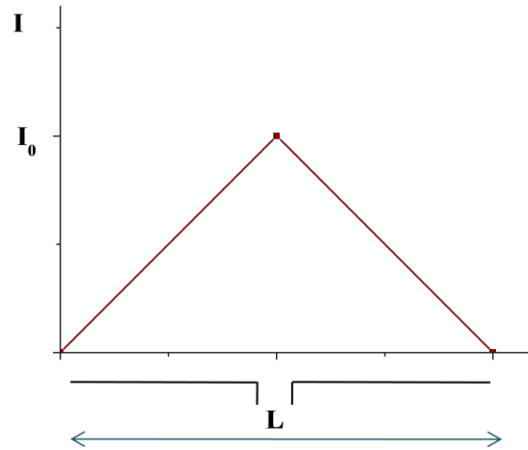


Figure IV.3. Courte antenne triangulaire servant de dipôle court.

La formule des potentiels est:

$$\vec{A}(M, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{\text{distribution}} \frac{i(S, t-r/c)}{r} d\tau \quad (\text{IV.46})$$

$$\text{Donc: } \vec{A}(M, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} I_0 l \frac{e^{i(\omega t - kr)}}{r} \vec{e}_z \quad (\text{IV.47})$$

Comme on avait pour le dipôle oscillant:

$$\vec{A}(M, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} i\omega p(t) \frac{e^{-ikr}}{r} = \frac{\mu_0}{4\pi} i\omega p_0(t) \frac{e^{i(\omega t - kr)}}{r} \quad (\text{IV.48})$$

On remplace $i\omega p_0$ par $I_0 l$ pour passer de résultats du dipôle à ceux de l'antenne. On revient donc à ce qu'on a obtenu dans « rayonnement du dipôle électrique oscillant » pour trouver les champs:

$$\begin{cases} \vec{E}_{\text{dipôle}} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} p_0 k^2 \frac{e^{-ikr}}{r} \sin\theta \vec{e}_\theta = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} p_0 \frac{k^2 \sin\theta}{r} e^{i(\omega t - kr)} \vec{e}_\theta \\ \vec{B}_{\text{dipôle}} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} p_0 k^2 \frac{e^{-ikr}}{r} \frac{\sin\theta}{c} \vec{e}_\varphi = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} p_0 \frac{k^2 \sin\theta}{rc} e^{i(\omega t - kr)} \vec{e}_\varphi \end{cases} \quad (\text{IV.49})$$

Alors:

$$\begin{cases} \vec{E} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} p_0 \frac{k^2 \sin\theta}{r} e^{i(\omega t - kr)} \vec{e}_\theta = -i \frac{\mu_0 \omega}{4\pi} I_0 l \frac{\sin\theta}{r} e^{i(\omega t - kr)} \vec{e}_\theta \\ \vec{B} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} p_0 \frac{k^2 \sin\theta}{rc} e^{i(\omega t - kr)} \vec{e}_\varphi = -\frac{\mu_0 \omega}{4\pi c} I_0 l \frac{\sin\theta}{r} e^{i(\omega t - kr)} \vec{e}_\varphi \end{cases} \quad (\text{IV.50})$$

Car: $k = \frac{\omega}{c}$ et $\epsilon_0 \mu_0 c^2 = 1$

Avec I_0 est l'amplitude du courant sinusoïdal parcourant l'antenne

Remarque:

i est comme d'habitude tel que $i^2 = -1$; cette notation, employant des nombres complexes est la même utilisée quand on travaille avec le formalisme des impédances.

La structure de l'onde est comme le dipôle, localement plane à grande distance, et l'amplitude est nulle dans l'alignement de l'antenne, et maximale dans une direction perpendiculaire à l'antenne.

L'expression des champs en utilisant la longueur d'onde :

$$\text{On a: } \omega = \frac{2\pi c}{\lambda}$$

$$\text{Alors : } \begin{cases} \vec{E} = -i \frac{\mu_0 \omega}{4\pi} I_0 l \frac{\sin \theta}{r} e^{i(\omega t - kr)} \vec{e}_\theta = -i \frac{\mu_0 c}{2\lambda} I_0 l \frac{\sin \theta}{r} e^{i(\omega t - kr)} \vec{e}_\theta \\ \vec{B} = -\frac{\mu_0 \omega}{4\pi c} I_0 l \frac{\sin \theta}{r} e^{i(\omega t - kr)} \vec{e}_\varphi = -\frac{\mu_0}{2\lambda} I_0 l \frac{\sin \theta}{r} e^{i(\omega t - kr)} \vec{e}_\varphi \end{cases} \quad (\text{IV.51})$$

L'impédance caractéristique d'un milieu est donnée par: $Z = \frac{|\vec{E}|}{|\vec{H}|}$

L'impédance caractéristique du vide est:

$$Z_0 = \mu_0 \frac{|\vec{E}|}{|\vec{B}|} = \mu_0 c = \frac{\mu_0}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = 377 \Omega \quad (\text{IV.52})$$

On pourrait calculer le vecteur de Poynting ainsi que pour son flux à travers une sphère de rayon r et on obtiendrait comme pour le dipôle une puissance constante, puisque le milieu de propagation (ici le vide) est non absorbant.

Une autre méthode pour faire le bilan énergétique consiste à calculer l'énergie perdue par l'antenne pendant l'instant dt en cherchant quelle est l'énergie localisée entre les sphères de rayon r et $r + dr$: $dE = e d\tau$

$$\text{Avec } d\tau = 2\pi r^2 \sin \theta d\theta dr \quad (\text{IV.53})$$

$$\text{Et } e = \left(\frac{\epsilon_0 E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0} \right) = \epsilon_0 E^2 \quad (\text{IV.54})$$

On peut écrire le champ électrique sous la forme:

$$\vec{E} = -i \frac{\mu_0 c}{2\lambda} I_0 l \frac{\sin \theta}{r} e^{i(\omega t - kr)} \vec{e}_\theta = -i Z_0 \frac{I_0 l}{2\lambda} \frac{\sin \theta}{r} e^{i(\omega t - kr)} \vec{e}_\theta \quad (\text{IV.55})$$

$$\text{On a : } \vec{E} = Z_0 \frac{I_0 l}{2\lambda} \frac{\sin \theta}{r} |\cos(\omega t - kr)| \quad (\text{IV.56})$$

$$\text{D'où l'énergie : } dE = \epsilon_0 \left(Z_0 \frac{I_0 l}{2\lambda} \frac{\sin \theta}{r} \right)^2 \cos^2(\omega t - kr) 2\pi r^2 \sin \theta d\theta dr \quad (\text{IV.57})$$

Cependant, l'énergie se propage dans le vide à la vitesse c , donc $dr=c$. on trouve alors en intégrant sur θ pour avoir toute la sphère

$$dE = \varepsilon_0 \left(Z_0 \frac{I_0 l}{2\lambda} \right)^2 \cos^2(\omega t - kr) 2\pi \int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta c dt \quad (\text{IV.58})$$

$$dE = \varepsilon_0 \left(Z_0 \frac{I_0 l}{2\lambda} \right)^2 \cos^2(\omega t - kr) 2\pi \frac{4}{3} c dt \quad (\text{IV.59})$$

La puissance rayonnée est donnée par :

$$P = \frac{dE}{dt} = \frac{2}{3} \pi c \varepsilon_0 Z_0^2 \cos^2(\omega t - kr) I_0^2 \left(\frac{l}{\lambda} \right)^2 = \frac{2}{3} \pi Z_0 \cos^2(\omega t - kr) I_0^2 \left(\frac{l}{\lambda} \right)^2 \quad (\text{IV.60})$$

Dont la valeur est moyenne :

$$\langle P \rangle = \frac{2}{3} \pi Z_0 \langle \cos^2(\omega t - kr) \rangle I_0^2 \left(\frac{l}{\lambda} \right)^2 = \frac{1}{3} \pi Z_0 I_0^2 \left(\frac{l}{\lambda} \right)^2 \quad (\text{IV.61})$$

$$\text{Alors : } \langle P \rangle = R_r \langle I^2 \rangle = \frac{1}{2} R_r I_0^2 \quad (\text{IV.62})$$

$$R_r \text{ Représente la résistance du rayonnement est donnée par : } R_r = \frac{2}{3} \pi Z_0 \left(\frac{l}{\lambda} \right)^2 \quad (\text{IV.63})$$

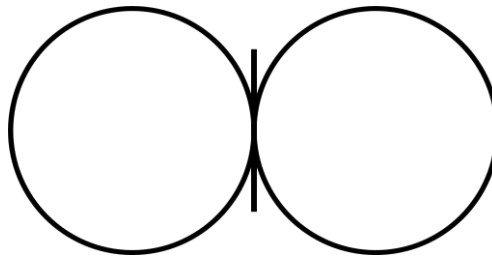


Figure IV.4. Rayonnement du dipôle élémentaire.

Le rayonnement du dipôle élémentaire, vu en coupe le long du dipôle, forme deux cercles jointifs au centre du dipôle, et le champ électrique est orienté tangentielllement le long de ces cercles.

b- l'antenne demi-onde

Le dipôle demi-onde est une antenne formée par deux conducteurs de longueur totale égale à la **moitié** de la longueur d'onde ($l = \frac{\lambda}{2}$) (Voir la figure IV.5.). L'unique particularité de cette longueur est que les formules mathématiques se simplifient énormément.

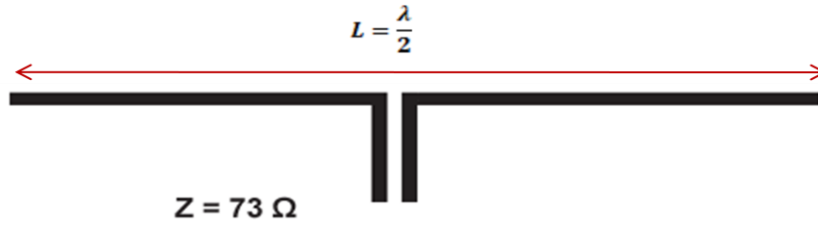


Figure IV.5. Antenne demi-onde

Diagramme du rayonnement pour lambda /2.

Diagramme en coupe du rayonnement pour lambda/2. Pour comparaison, la section du diagramme d'émission d'un dipôle court apparaît en pointillés. Ils ne sont pas très différents.

Le courant en point de l'antenne dépend désormais du temps et du point : $I(z, t) = I_0 e^{i\omega t}$

Le champ électrique rayonné par une longueur élémentaire dz est :

$$\vec{dE} = -i Z_0 \frac{I_0(z) dz}{2\lambda} \frac{\sin \theta}{r} e^{i(\omega t - k(r - z \cos \theta))} \vec{e}_\theta \quad (\text{IV.64})$$

*Alors le champ E s'exprime selon (on place l'origine du repère au milieu de l'antenne):

$$\vec{E} = -i Z_0 \frac{1}{2\lambda} \frac{\sin \theta}{r} e^{i(\omega t - kr)} \int_{-1/2}^{1/2} I_0(z) e^{ikz \cos \theta} dz \vec{e}_\theta \quad (\text{IV.65})$$

$$\text{Le courant s'écrit : } I_0(z) = I_m \cos\left(2\pi \frac{z}{\lambda}\right) \quad (\text{IV.66})$$

$$\text{D'où : } \vec{E} = -i Z_0 \frac{1}{2\lambda} \frac{\sin \theta}{r} e^{i(\omega t - kr)} \int_{-1/2}^{1/2} I_m \cos\left(2\pi \frac{z}{\lambda}\right) e^{ikz \cos \theta} dz \vec{e}_\theta \quad (\text{IV.67})$$

On utilise les formules d'Euler pour calculer l'intégrale :

$$\int_{-1/2}^{1/2} I_m \cos\left(2\pi \frac{z}{\lambda}\right) e^{ikz \cos \theta} dz = \int_{-1/2}^{1/2} I_m \cos(kz) e^{ikz \cos \theta} dz \quad (\text{IV.68})$$

$$= \int_{-1/2}^{1/2} I_m \frac{e^{ikz} + e^{-ikz}}{2} e^{ikz \cos \theta} dz \quad (\text{IV.69})$$

$$= \frac{I_m}{2} \int_{-1/2}^{1/2} e^{ik(1+\cos \theta)z} dz + \frac{I_m}{2} \int_{-1/2}^{1/2} e^{ik(-1+\cos \theta)z} dz \quad (\text{IV.70})$$

$$= \frac{I_m}{2} \frac{[e^{ik(1+\cos \theta)z}]_{-1/2}^{1/2}}{ik(1+\cos \theta)} + \frac{I_m}{2} \frac{[e^{ik(-1+\cos \theta)z}]_{-1/2}^{1/2}}{ik(-1+\cos \theta)} \quad (\text{IV.71})$$

$$= \frac{I_m}{2} \frac{2i \sin\left(k(1+\cos \theta)\frac{1}{2}\right)}{ik(1+\cos \theta)} + \frac{I_m}{2} \frac{2i \sin\left(k(-1+\cos \theta)\frac{1}{2}\right)}{ik(-1+\cos \theta)} \quad (\text{IV.72})$$

Or $\frac{k}{2} = \frac{\pi}{2}$, alors le résultats se simplifie selon :

$$\int_{-1/2}^{1/2} I_m \cos\left(2\pi \frac{z}{\lambda}\right) e^{ikz \cos \theta} dz = \frac{I_m}{k} \left(\frac{\sin\left((1+\cos \theta)\frac{\pi}{2}\right)}{1+\cos \theta} + \frac{\sin\left((-1+\cos \theta)\frac{\pi}{2}\right)}{-1+\cos \theta} \right) \quad (\text{IV.73})$$

$$= \frac{I_m}{k} \left(\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos \theta\right)}{1+\cos \theta} + \frac{-\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos \theta\right)}{-1+\cos \theta} \right) = \frac{I_m}{k} \frac{2\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos \theta\right)}{1-\cos^2 \theta} = \frac{I_m}{k} \frac{2\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos \theta\right)}{\sin^2 \theta} \quad (\text{IV.74})$$

Le champ rayonné est finalement :

$$\vec{E} = -i Z_0 \frac{1}{2\lambda} \frac{\sin \theta}{r} e^{i(\omega t - kr)} \frac{I_m}{k} \frac{2\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos \theta\right)}{\sin^2 \theta} \vec{e}_\theta \quad (\text{IV.75})$$

$$= -i \frac{Z_0 I_m}{2\pi} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos \theta\right)}{\sin \theta} \frac{e^{i(\omega t - kr)}}{r} \vec{e}_\theta \quad (\text{IV.76})$$

Le champ magnétique se déduit de \vec{E} comme dans le cas précédent. On a encore une structure

$$\text{localement plane et } \vec{B} = \frac{|\vec{E}|}{c} \vec{e}_\varphi \quad (\text{IV.77})$$

Le vecteur de Poynting $\vec{\Pi}$ associé au champ rayonné est :

$$\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} = \frac{\vec{E}^2}{\mu_0 c} \vec{e}_r = \frac{1}{\mu_0 c} \left(\frac{Z_0 I_m}{2\pi} \right)^2 \left(\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos \theta\right)}{\sin \theta} \right)^2 \frac{\cos^2(\omega t - kr)}{r^2} \vec{e}_r \quad (\text{IV.78})$$

D'où la valeur moyenne :

$$\langle \vec{\Pi} \rangle = \frac{1}{2\mu_0 c r^2} \left(\frac{Z_0 I_m}{2\pi} \right)^2 \left(\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos \theta\right)}{\sin \theta} \right)^2 \vec{e}_r \quad (\text{IV.79})$$

Le flux moyen à travers une sphère de rayon r :

$$P = \iint \langle \vec{\Pi} \rangle \cdot \vec{dS} = \iint \frac{1}{2\mu_0 c r^2} \left(\frac{Z_0 I_m}{2\pi} \right)^2 \left(\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos \theta\right)}{\sin \theta} \right)^2 r^2 \sin \theta \overline{d\theta} \vec{e}_\varphi \quad (\text{IV.80})$$

$$= \frac{\pi}{\mu_0 c} \left(\frac{Z_0 I_m}{2\pi} \right)^2 \int_0^\pi \left(\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos \theta\right)}{\sin \theta} \right)^2 \overline{d\theta} = \frac{Z_0 I_m^2}{4\pi} \int_0^\pi \left(\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos \theta\right)}{\sin \theta} \right)^2 \overline{d\theta} \quad (\text{IV.81})$$

$$\text{Alors : } P = \frac{1}{2} R_r I_m^2 \quad (\text{IV.82})$$

$$\text{Et la résistance de rayonnement est donnée par : } R_r = \frac{Z_0}{2\pi} \int_0^\pi \left(\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos \theta\right)}{\sin \theta} \right)^2 \overline{d\theta} \quad (\text{IV.83})$$

Remarque:

-L'intégrale se calcule numériquement : une valeur approchée est de 1.219.

- La résistance d'une antenne demi-onde est égale à environ 73 Ω

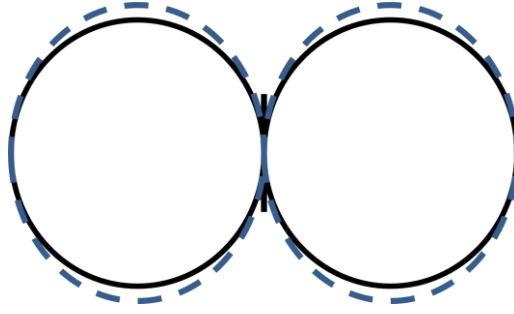


Figure IV.6. Rayonnement d'un dipôle demi-onde

IV.4. Quadripôle électrique et dipôle magnétique:

Considérons des sources localisées dans une région de dimension a autour de O . On observe le champ rayonné à longue distance; Le potentiel vecteur retardé est :

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi r} (-ik) \int \vec{j}(\vec{r}')(\vec{n}\vec{r}') d^3\vec{r}' e^{i(kr - \omega t)} \quad (\text{IV.84})$$

En utilisant la formule:

$$\vec{n}(\vec{r}' \wedge \vec{j}) = \vec{r}'(\vec{n}\vec{j}) - \vec{j}(\vec{n}\vec{r}') \quad (\text{IV.85})$$

Il vient :

$$\int \vec{j}(\vec{r}')(\vec{n}\vec{r}') d^3\vec{r}' = \frac{1}{2} \int \vec{j}(\vec{n}\vec{r}') d^3\vec{r}' + \frac{1}{2} \int \vec{j}(\vec{n}\vec{r}') d^3\vec{r}' \quad (\text{IV.86})$$

$$\int d^3\vec{r}' j^i(\vec{n}\vec{r}') = \int \left[\underbrace{\frac{1}{2} \vec{j}(\vec{n}\vec{r}') + \frac{1}{2} (\vec{r}')(\vec{n}\vec{j})}_{J^i} - \underbrace{\frac{1}{2} \vec{n} \wedge (\vec{r}' \wedge \vec{j})}_{R^i} \right] d^3\vec{r}' = J^i + R^i \quad (\text{IV.87})$$

On calcule J^i :

$$J^i = \frac{1}{2} \int [j^i(n^j x^j) + x^i(n^j j^j)] d^3\vec{r}' = \frac{1}{2} n^j \int [j^i x^j + j^j x^i] d^3\vec{r}' \quad (\text{IV.88})$$

On considère le terme de surface :

$$\int_{\Omega} \partial_k [x^i x^j j^k] d^3\vec{r}' = \int_{\Omega} [\partial_k^i x^j j^k + x^i \partial_k^j j^k + x^i x^j \partial_k^k j^k] d^3\vec{r}' \quad (\text{IV.89})$$

$$0 = \int [x^j j^i + x^i j^j - x^i x^j \frac{\partial \rho}{\partial t}] d^3\vec{r}' \quad (\text{IV.90})$$

Le moment magnétique est donné par:

$$\vec{M} = \frac{1}{2} \int (\vec{r}' \wedge \vec{j}) d^3\vec{r}' \quad (\text{IV.91})$$

Le potentiel vecteur est :

$$\vec{A}^i(\vec{r}, t) = -\frac{\omega^2}{8\pi r \epsilon_0 c^3} e^{i(kr - \omega t)} n^j \int x^i x^j \rho(\vec{x}) d^3\vec{r}' + \frac{ik\mu_0}{4\pi r} (\vec{n} \wedge \vec{M})^i e^{i(kr - \omega t)} \quad (\text{IV.92})$$

Il s'écrit sous la forme :

$$\vec{A}^i(\vec{r}, t) = \frac{1}{r} e^{ikr} n^j \Lambda^{ij} \quad (\text{IV.93})$$

Calculons le champ magnétique \vec{B} :

$$\vec{B}^i = (\text{rot } \vec{A})^i = \varepsilon^{ijk} \partial_j A^k = \varepsilon^{ijk} \partial_j \left(\frac{e^{ikr}}{r} \right) \Lambda^{kl} n^l = \frac{ik}{r} \underbrace{\varepsilon^{ijk} n^j \Lambda^{kl} n^l}_{(*)} e^{ikr} \quad (\text{IV.94})$$

Le terme (*) est égal à :

$$(*) = \varepsilon^{ijk} n^j n^l \int x^k x^l \rho(\vec{x}) d^3\vec{x} = \varepsilon^{ijk} n^j n^l \int \left(x^k x^l - \frac{1}{3} \delta^{kl} \right) \rho(\vec{x}) d^3\vec{x} \quad (\text{IV.95})$$

Le champ magnétique est:

$$\vec{B} = \frac{-i \omega^3 e^{i(kr-\omega t)}}{24 \pi \varepsilon_0 c^4} \frac{1}{r} \vec{n} \wedge Q \vec{n} - \frac{\omega^2}{4 \pi r \varepsilon_0 c^4} e^{i(kr-\omega t)} \vec{n} \wedge (\vec{n} \wedge \vec{M}) \quad (\text{IV.96})$$

$$Q^{ij} = \int (3 x^i x^j - \delta^{ij} \vec{x}^2) \rho(\vec{x}) d^3\vec{x} \quad (\text{IV.97})$$

Q est un tenseur symétrique de trace nulle. Calculons la puissance rayonnée :

$$\vec{n} \wedge Q \vec{n} = \varepsilon_{ijk} n_j Q_{kl} n_l \quad (\text{IV.98})$$

Par conséquent :

$$[\vec{n} \wedge Q \vec{n}]^2 = \varepsilon_{ijk} n_j Q_{kl} n_l \varepsilon_{i\rho\tau} n_\rho Q_{\tau\sigma} n_\sigma \quad (\text{IV.99})$$

$$= (\delta_{j\rho} \delta_{k\tau} - \delta_{j\tau} \delta_{k\rho}) n_j n_\rho n_l n_\sigma Q_{kl} Q_{\tau\sigma} \quad (\text{IV.100})$$

$$= n_l n_\sigma Q_{kl} Q_{k\sigma} - n_j n_k n_l n_\sigma Q_{kl} Q_{j\sigma} \quad (\text{IV.101})$$

La contribution quadripolaire électrique à la puissance rayonnée par unité d'angle solide est :

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{\omega^6}{1152 \pi^2 c^5 \varepsilon_0} |\vec{n} \wedge Q \vec{n}|^2 \quad (\text{IV.102})$$

La contribution dipolaire magnétique à la puissance rayonnée par unité d'angle solide est :

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{\omega^4}{32 \pi^2 c^5 \varepsilon_0} |\vec{n} \wedge (\vec{n} \wedge \vec{M})|^2 \quad (\text{IV.103})$$

Puissance totale rayonnée :

1- Cas quadripolaire électrique :

A partir de la relation (IV.101), l'invariance par rotation donne

$$\int n_l n_\sigma d\Omega = \frac{4\pi}{3} \delta_{l\sigma} \quad (\text{IV.104})$$

$$\int n_j n_k n_l n_\sigma d\Omega = \frac{4\pi}{15} (\delta_{jk} \delta_{l\sigma} + \delta_{j\sigma} \delta_{kl} + \delta_{jl} \delta_{k\sigma}) \quad (\text{IV.105})$$

Il vient en utilisant $\text{tr} Q = 0$:

$$\int [\vec{n} \wedge Q \vec{n}]^2 d\Omega = \frac{4\pi}{3} Q_{kl} Q_{kl} - \frac{4\pi}{15} [2 Q_{kl} Q_{kl}] = \frac{4\pi}{5} Q_{kl} Q_{kl} = \frac{4\pi}{5} \text{tr} (Q^2) \quad (\text{IV.106})$$

Alors:
$$P_{qe} = \frac{\omega^6}{1440\pi\epsilon_0 c^5} \text{tr} (Q^2) \quad (\text{IV.107})$$

2 - Cas dipolaire magnétique :

$$[\vec{n} \wedge (\vec{n} \wedge \vec{M})]^2 = [\vec{n}(\vec{M} \cdot \vec{n}) - \vec{M}]^2 = (\vec{M} \cdot \vec{n})^2 - 2(\vec{n} \cdot \vec{M})^2 + \vec{M}^2 \quad (\text{IV.108})$$

$$= \vec{M}^2 - (\vec{M} \cdot \vec{n})^2 = M^2 - M^2 \cos^2 \theta = M^2 \sin^2 \theta \quad (\text{IV.109})$$

On en déduit donc :

$$P_{dm} = \frac{2\pi\omega^4 M^2}{32\pi^2 \epsilon_0 c^5} \int_0^\pi \sin^2 \theta \sin \theta d\theta = \frac{M^2 \omega^4}{12\pi^2 \epsilon_0 c^5} \quad (\text{IV.110})$$

IV.5. Rayonnement d'un quadripôle magnétique

IV.5.1. Définition

En physique, le quadripôle magnétique est une source de champ magnétique.

La manière la plus simple pour représenter un quadripôle est l'addition de deux aimants droits parallèles, en sens inverse. Les composantes principales de leur champ magnétique s'annulent, seules subsistent les composantes de l'ordre supérieur.

Le principe d'un *Quadripôle magnétique* est semblable au cas électrostatique, à ceci près que la règle des trois doigts de la main droite complique les choses.

IV.5.2-Le champ créé par un quadripôle magnétique

Ce type de quadripôle possède quatre pôles : deux nord et deux sud, situés aux faces alternées d'un carré. Dans le plan (noté ici $z=0$) où se trouvent les quatre pôles, le champ magnétique idéal est donné par :

$$\begin{cases} B_x = K \times y \\ B_y = K \times x \\ B_z = 0 \end{cases} \quad (\text{IV.111})$$

Avec K est le gradient (en Teslas par mètre) de la composante en x selon y , ou inversement. Une composante du champ est nulle sur les deux axes de symétrie, il est totalement nul au centre¹. Dans l'axe normal au quadripôle, noté ici z , le champ décroît en z^4

Le quadripôle magnétique est utilisé dans les accélérateurs de particules. il sert à focaliser ou défocaliser les particules électriquement chargées. Si K est positif, des particules chargées positivement qui traversent le plan du quadripôle sont focalisées horizontalement et défocalisées verticalement. Ce résultat est inversé si on change le signe de K ou celui de la charge de la particule.

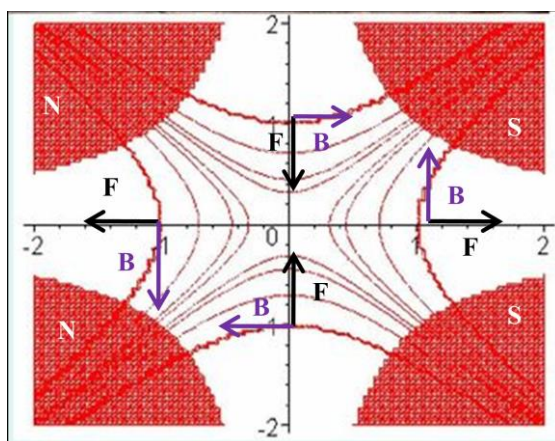


Figure IV.7 : pôles et lignes de champ d'un quadripôle magnétique



Figure IV.8 : Photographie d'un quadripôle magnétique

IV.6. Théorème de réciprocité

On considère un volume source V_1 avec une densité de courant J_1 , placé dans un milieu éventuellement structuré (la Fig. 9.3gauche).

Dans le deuxième cas, représenté sur la Fig. 9.3 (droite 9.3a), le même milieu est excité par une autre source de volume V_2 et de densité de courant j_2 .

E_1 et H_1 sont les champs électrique et magnétique rayonnés dans le premier cas, respectivement.

E_2 et H_2 sont les champs électrique et magnétique rayonnés dans le deuxième cas.

On suppose que ces sources rayonnent dans un milieu linéaire, isotrope et homogène, caractérisé par une permittivité électrique ϵ et une perméabilité magnétique μ (on note que les paramètres ϵ_r et μ_r décrivant les matériaux sont des tenseurs)

Nous allons voir que les champs dans les cas 1 et 2 sont reliés, la relation obtenue formant le *théorème de réciprocité*.

La figure **IV.9** présente deux cas considérées dans le théorème de réciprocité. Les objets en bleu représentent un milieu structuré (absorbants, parois réfléchissantesetc).

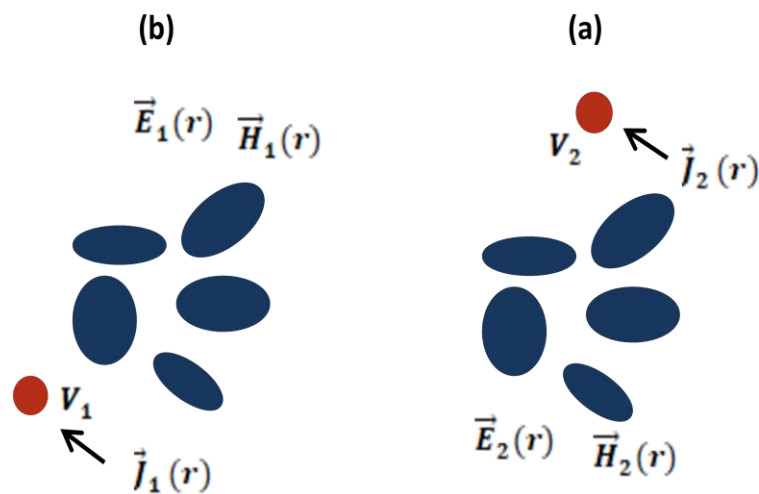


Figure **IV.9**. Théorème de réciprocité.

Les champs dans les deux cas satisfont aux équations de Maxwell :

$$\vec{\nabla} \times \vec{E}_1 = \omega i \vec{B}_1 \quad (\text{IV.112})$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H}_1 = \vec{J}_1 - \omega i \vec{D}_1 \quad (\text{IV.113})$$

Et $\vec{\nabla} \times \vec{E}_2 = \omega i \vec{B}_2 \quad (\text{IV.114})$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H}_2 = \vec{J}_2 - \omega i \vec{D}_2 \quad (\text{IV.115})$$

On a également les relations constitutives

$$\vec{D}_1 = \varepsilon_0 \varepsilon_r \vec{E}_1 \quad \text{et} \quad \vec{B}_1 = \mu_0 \mu_r \vec{H}_1. \quad (\text{IV.116})$$

$$\vec{D}_2 = \varepsilon_0 \varepsilon_r \vec{E}_2 \quad \text{et} \quad \vec{B}_2 = \mu_0 \mu_r \vec{H}_2. \quad (\text{IV.117})$$

Supposons ici que ces tenseurs sont symétriques, ce qui est une condition nécessaire à la validité du théorème de réciprocité.

A partir des équations de Maxwell ci-dessus, nous obtenons l'égalité suivante :

$$\vec{H}_2 \cdot \vec{\nabla} \times \vec{E}_1 - \vec{E}_1 \cdot \vec{\nabla} \times \vec{H}_2 + \vec{E}_2 \cdot \vec{\nabla} \times \vec{H}_1 - \vec{H}_1 \cdot \vec{\nabla} \times \vec{E}_2 \quad (\text{IV.118})$$

$$= \omega i (\vec{B}_1 \cdot \vec{H}_2 - \vec{H}_1 \cdot \vec{B}_2) - \omega i (\vec{D}_1 \cdot \vec{E}_2 - \vec{E}_1 \cdot \vec{D}_2) + \vec{j}_1 \cdot \vec{E}_2 - \vec{j}_2 \cdot \vec{E}_1 \quad (\text{IV.119})$$

on peut écrire le membre de gauche sous la forme : $\vec{\nabla} \cdot (\vec{E}_1 \times \vec{H}_2 - \vec{E}_2 \times \vec{H}_1)$. le membre de droite peut se simplifier car chacun des deux premiers termes s'annule lorsque ε et μ sont symétriques. On trouve alors :

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{E}_1 \times \vec{H}_2 - \vec{E}_2 \times \vec{H}_1) = \vec{j}_1 \cdot \vec{E}_2 - \vec{j}_2 \cdot \vec{E}_1 \quad (\text{IV.120})$$

En intégrant cette dernière relation, sur un volume V , entouré par une surface fermée S :

Le membre de gauche se transforme en une intégrale de surface, conduisant à`

$$\int_S [\vec{E}_1(r) \times \vec{H}_2(r) - \vec{E}_2(r) \times \vec{H}_1(r)] \cdot \vec{n} \, d^2r = \int_V [\vec{j}_1(r) \cdot \vec{E}_2(r) - \vec{j}_2(r) \cdot \vec{E}_1(r)] \, d^3r \quad (\text{IV.121})$$

Où \vec{n} désigne la normale extérieure à l'élément de surface ds .

Cette relation est appelé la relation de réciprocité de Lorentz.

- Lorsque la surface S est une sphère située à une distance très grande ($R \rightarrow \infty$) des sources de rayonnement: ce sera l'hypothèse générale faite dans l'étude des antennes, alors les champs électrique et magnétique prennent la forme d'ondes sphériques sortantes, et ont des amplitudes complexes de la forme :

$$\vec{E}_1(r) \simeq \vec{E}_1(u) \frac{e^{(ik_0 r)}}{r} \quad \text{et} \quad \vec{E}_2(r) \simeq \vec{E}_2(u) \frac{e^{(ik_0 r)}}{r} \quad (\text{IV.122})$$

$$\vec{H}_1(r) \simeq \vec{H}_1(u) \frac{e^{(ik_0 r)}}{r} \quad \text{et} \quad \vec{H}_2(r) \simeq \vec{H}_2(u) \frac{e^{(ik_0 r)}}{r} \quad (\text{IV.123})$$

Où \vec{u} est le vecteur unitaire définissant la direction d'observation.

Les équations de Maxwell : $\vec{\nabla} \times \vec{E}_1(r) = i\omega\mu_0 \vec{H}_1(r)$ et $\vec{\nabla} \times \vec{E}_2(r) = i\omega\mu_0 \vec{H}_2(r)$ imposent que les amplitudes soient reliées par $\omega\mu_0 \vec{H}_1(u) = k_0 u \wedge \vec{E}_1(u)$ et $\omega\mu_0 \vec{H}_2(u) = k_0 u \wedge \vec{E}_2(u)$,

de telle sorte que les terme $\vec{E}_1 \times \vec{H}_2 - \vec{E}_2 \times \vec{H}_1$ s'annule en champ lointain (donc sur la surface S).

Nous obtenons donc finalement :

$$\int_{V_1} \vec{J}_1(r) \cdot \vec{E}_2(r) d^3r = \int_{V_2} \vec{J}_2(r) \cdot \vec{E}_1(r) d^3r \tag{IV.124}$$

Les intégrales étant étendues aux volumes des deux sources. Ce résultat est connu sous l'appellation de théorème de réciprocité. Il montre que les champs rayonnés dans les cas 1 et 2 de la Figure IV.9 ne sont pas indépendants.

Dans le cas de sources dipolaires électriques situées aux points r_1 et r_2 , et de moments dipolaires p_1 et p_2 , on a $\vec{J}_1(r) = -i\omega p_1 \delta(r - r_1)$ et $\vec{J}_2(r) = -i\omega p_2 \delta(r - r_2)$. On obtient alors une forme simplifiée du théorème de réciprocité :

$$p_1 \cdot \vec{E}_2(r_1) = p_2 \cdot \vec{E}_1(r_2) \tag{IV.125}$$

Afin d'interpréter le résultat, on considère le cas particulier où les deux sources sont de même amplitude. Le théorème de réciprocité présente alors qu'en inter-changeant source et point d'observation, la composante du champ projetée sur la direction de la source est conservée.

Cas particulier: on considère les deux sources possèdent la même amplitude ($|p_1| = |p_2|$). Le théorème de réciprocité présente alors qu'en inter changeant source et point d'observation (voir la Figure IV.10), la composante du champ projetée sur la direction de la source est conservée.

Remarque :

Pour des ondes scalaires (par exemple :en acoustique dans un fluide), il n'y aurait pas de projection et on aurait plus simplement $\vec{E}_2(r_1) = \vec{E}_1(r_2)$.

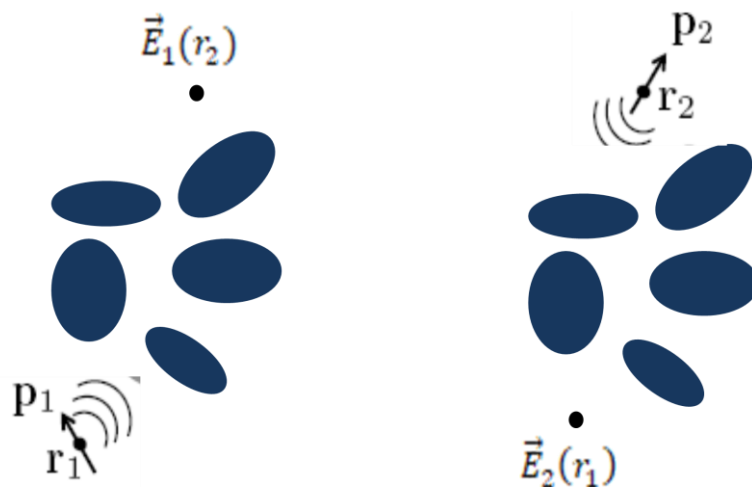


Figure IV.10. Théorème de réciprocité avec des sources dipolaires