وزارة التعليم العالي و البحث العلمي
كلية العلوم الاقتصادية و التجارية و علوم التسيير

جامعة الشاذلي بن جديد -الطارف-
قسم الجذع المشترك

التاريخ: 2024/01/22

المدة: 1 سا 30 د

امتحان السداسي الأول في مقياس الرياضيات

التمرين الأول: (06 نقاط)

A. أجب بصحيح أو خطأ مع التعليل.

1. كل عدد حقيقي هو عدد ناطق.
2. $0,52$ هو عدد ناطق.
3. مربع عدد ناطق لا يمكن أن يكون ناطقا.
4. لا يوجد عدد حقيقي ليس عشريا.
5. حاصل قسمة عددين عشريين هو عدد عشري
6. مقلوب عدد عشري ممكن أن يكون عدد صحيح

B. لتكن C،B،A ثلاثة أجزاء من المجموعة E .

1. بسط المجموعتين التاليتين: $\overline{\overline{A\cap B}\cup\overline{C\cap A}}$ و $\overline{\overline{A\cup B}\cap\overline{C\cup A}}$
2. بين أن : $A\Delta B=(A\cup B)\setminus(A\cap B)$

التمرين الثاني: (07 نقاط)

(u_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $\begin{cases} u_0=0 \\ u_{n+1}=\dfrac{2u_n+2}{u_n+3} \end{cases}$.

و (v_n) المتتالية المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $v_n=\dfrac{u_n-1}{u_n+2}$

1. بين أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها q و حدها الأول v_0
2. أ. أكتب عبارة v_n بدلالة n ثم u_n بدلالة n؛
3. أحسب نهاية المتتالية (u_n)

التمرين الثالث: (07 نقاط)

1. أدرس تقارب السلسلتين التاليتين:
   - $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n^2+1}{8n^2-1}$ باستخدام اختبار التباعد (مبرهنة الشرط الأساسي)؛
   - $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{4^n+1}$ باستخدام اختبار المقارنة.
2. أحسب مشتقة الدالة: $f(x)=4x\sqrt{x}$.
3. أحسب المشتقات الجزئية من الرتبة الأولى و الثانية للدالة: $f(x)=x^2(x+y)$.
4. أدرس استمرارية الدالة f عند $x_0=2$ حيث:

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{2x+1}{7-3x}, & x\leq 2 \\ \dfrac{x^2+x-6}{x-2}, & x>2 \end{cases}$$

بالتوفيق للجميع

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
جامعة الشاذلي بن جديد - الطارف -
كلية العلوم الاقتصادية والتجارية وعلوم التسيير
قسم الجذع المشترك

التاريخ: 24/01/22

التصحيح النموذجي لامتحان السداسي الأول في مقياس الرياضيات

التمرين الأول (06 نقاط)

A.

1- خطأ: π عدد حقيقي لكنه ليس ناطقا (0,5)

2- صحيح: 0,52 عدد عشري و $\mathbb{D} \subset \mathbb{Q}$ (0,5)

3- خطأ: $\sqrt{2}$ عدد غير ناطق حيث مربعه يساوي 2 عدد طبيعي إذن هو عدد ناطق (0,5)

4- خطأ: $\frac{1}{3}$ عدد حقيقي لكنه ليس عشريا (0,5)

5- خطأ: $\frac{2}{3}$ حاصل قسمة عددين عشريين غير معدومين ورغم ذلك ليس عشريا (0,5)

6- صحيح: مقلوب $\frac{1}{2}$ هو 2 وهو عدد صحيح (0,5)

B.

1) $\star$ $\overline{(A \cup B)} \cap \overline{C \cup \bar{A}} = (\bar{A} \cap \bar{B}) \cap (\bar{C} \cap A)$ (قانونا دي مورغان)

$= (\bar{A} \cap A) \cap (\bar{B} \cap \bar{C})$ ($\cap$: تجميعية)

$= \emptyset \cap (\bar{B} \cap \bar{C})$

$$\boxed{\overline{(A \cup B)} \cap \overline{(C \cup \bar{A})} = \emptyset}$$ (1)

$\star$ $\overline{(A \cap B)} \cup \overline{(C \cap \bar{A})} = (\bar{A} \cup \bar{B}) \cup (\bar{C} \cup A)$

$= (\bar{A} \cup A) \cup (\bar{B} \cup \bar{C})$

$= E \cup (\bar{B} \cup \bar{C})$

$$\boxed{\overline{(A \cap B)} \cup \overline{(C \cap \bar{A})} = E}$$ (1)

2)- $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$

$x \in A \Delta B \Leftrightarrow x \in (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$

$\Leftrightarrow (x \in A \setminus B) \vee (x \in B \setminus A)$

$\Leftrightarrow (x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \in B \wedge x \notin A)$

$$x\in A\Delta B \Leftrightarrow \left[(x\in A)\vee(x\in B\wedge x\notin A)\wedge(x\notin B)\vee(x\in B\wedge x\notin A)\right]$$

$$\Leftrightarrow \left[(x\in A\vee x\in B)\wedge(x\in A\vee x\notin A)\right]$$

$$\wedge\left[(x\notin B\vee x\in B)\wedge(x\notin B\vee x\notin A)\right]$$

1 $$\Leftrightarrow \left[x\in (A\cup B)\cap E\right]\wedge\left[x\in E\cap(\overline{A\cap B})\right]$$

$$\Leftrightarrow \left[x\in(A\cup B)\right]\wedge\left[x\notin(A\cap B)\right]$$

$$\Leftrightarrow x\in(A\cup B)\setminus(A\cap B)$$

ومنه $A\Delta B=(A\cup B)\setminus(A\cap B)$

التمرين الثاني (07 نقاط)

1. تبيين أن (v_n) متتالية هندسية

لدينا:

$$v_{n+1}=\frac{u_{n+1}-1}{u_{n+1}+2}$$

$$=\frac{\frac{2u_n+2}{u_n+3}-1}{\frac{2u_n+2}{u_n+3}+2}=\frac{\frac{2u_n+2-u_n-3}{\cancel{u_n+3}}}{\frac{2u_n+2+2u_n+6}{\cancel{u_n+3}}}$$

$$=\frac{u_n-1}{4u_n+8}=\frac{1}{4}\left(\frac{u_n-1}{u_n+2}\right)$$

$$\boxed{v_{n+1}=\frac{1}{4}v_n}$$ 2,5

ومنه (v_n) متتالية هندسية أساسها $\boxed{q=\frac{1}{4}}$ وحدها الأول:

$$v_0=\frac{u_0-1}{u_0+2}=-\frac{1}{2}$$

$$\boxed{v_0=-\frac{1}{2}}$$ 0,5

تابع التمرين الثاني

ج* كتابة عبارة v_n بدلالة n :

لدينا : (v_n) متتالية هندسية أساسها $q=\frac{1}{4}$ و حدها الأول $v_0=-\frac{1}{2}$ إذن :

(1) $$\boxed{v_n=-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^n}$$

* كتابة عبارة u_n بدلالة n :

$$v_n=\frac{u_n-1}{u_n+2} \Rightarrow v_n(u_n+2)-(u_n-1)=0$$

$$\Rightarrow v_n u_n+2v_n-u_n+1=0$$

$$\Rightarrow u_n(v_n-1)+2v_n+1=0$$

$$\Rightarrow u_n(v_n-1)=-1-2v_n$$

$$\Rightarrow \boxed{u_n=\frac{1+2v_n}{1-v_n}} \text{ أو } \boxed{u_n=\frac{-1-2v_n}{v_n-1}}$$

(2) $$\Rightarrow \boxed{u_n=\frac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^n}{1+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^n}}$$

3. حساب نهاية المتتالية (u_n) :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n=\lim_{n\to+\infty}\frac{1-\cancel{\left(\frac{1}{4}\right)^n}}{1+\frac{1}{2}\cancel{\left(\frac{1}{4}\right)^n}}=\frac{1}{1}=1$$

(1) $$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n=1}$$

التمرين الثالث (07 نقاط)

1- باستخدام اختبار التباعد:

$$*\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n^2+1}{8n^2-1}$$

(1) $$\lim_{n\to+\infty}\frac{3n^2+1}{8n^2-1}=\frac{3}{8}\neq 0$$

تابع التمرين الثالث

نهاية المتتالية لا تساوي صفرًا ← السلسلة متباعدة وليس لها مجموع.

* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{4^n+1}$ باستخدام اختبار المقارنة:

لنختبر السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{4^n}$ وبما أن $\frac{3}{4^n} = 3\left(\frac{1}{4}\right)^n$

وحيث أن $\left(\frac{1}{4}\right)^n$ سلسلة هندسية أساسها $q = \frac{1}{4} < 1$

إذن هي متقاربة وبما أن $\frac{3}{4^n+1} < \frac{3}{4^n}$ لكل قيم $n \geq 1$

إذن فإن السلسلة $\sum_{n\geq 1} \frac{3}{4^n+1}$ أيضا متقاربة (1,5)

2 - حساب مشتقة الدالة $f(x) = 4x\sqrt{x}$

نستخدم: $f'(x) = (uv)' = u'v + uv'$

(1) $v'(x) = \frac{-1}{2\sqrt{x}}$, $u'(x) = 4 \to \boxed{f'(x) = 4\sqrt{x} + \frac{2x}{\sqrt{x}}}$

3 - حساب المشتقات الجزئية للدالة $f(x,y) = x^2(x+y)$

+ المشتقات الجزئية من الرتبة الأولى:

$\boxed{\frac{\delta f}{\delta x}(x,y) = 3x^2 + 2xy}$ (0,25)

$\boxed{\frac{\delta f}{\delta y}(x,y) = x^2}$ (0,25)

+ المشتقات الجزئية من الرتبة الثانية:

(0,25) $\boxed{\frac{\delta^2 f}{\delta x^2} = 6x + 2y}$, $\boxed{\frac{\delta^2 f}{\delta y^2}(x,y) = 0}$ (0,25) , $\boxed{\frac{\delta^2 f(x,y)}{\delta y \delta x} = \frac{\delta^2 f(x,y)}{\delta x \delta y} = 2x}$ (0,5)

4 - دراسة استمرارية الدالة $f(x)$ عند 2

لدينا: $\boxed{f(2) = \frac{2\times 2+1}{7-3\times 2} = 5}$ (0,25)

(0,25) $\lim_{x \overset{>}{\to} 2} f(x) = \lim_{x \overset{>}{\to} 2} \frac{x^2+x-6}{x-2} = \frac{0}{0}$ ح ع ت

إزالتها بالقسمة الإقليدية

$\lim_{x \overset{>}{\to} 2} \frac{(x-2)(x+3)}{x-2} = 5 = f(2)$ f مستمرة على يمين 2 (1)

$\lim_{x \overset{<}{\to} 2} f(x) = \lim_{x \overset{<}{\to} 2} \frac{2x+1}{7-3x} = 5 = f(2)$ f مستمرة على يسار 2 (0,25)

$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^+} f(x) = f(2)$ (0,25)

ومنه f مستمرة عند 2