Corrigé type de examen du Physique de Solide II

Questions de cour (5pts)

1- C_V est défini par la variation de l'énergie interne d'un solide avec T : $C_V = \frac{\partial U}{\partial T}\Big|_{V=cte}$ (1)

2- La différence entre le modèle d'Einstien et le modèle de Debye en ce concerne la capacité calorifique des solides : (1pts)

Les différences	le modèle d'Einstien	le modèle de Debye
C_V	$3\,Nk_B$ (0,1)	(0,1) $234Nk_D\left(\frac{T}{T_D}\right)^3$
Températures	Les hautes températures (0,1)	(0,1) Les faibles températures
Complexité mathématique	Relativement simple (0,1)	(0,1) Plus complexe
La densité de modes	par distributions de Dirac $D(\omega) = N\delta\omega$ (0,1)	$D(\omega) = \frac{Vk^2}{2\pi^2 \upsilon} = \frac{V}{2\pi^2 \upsilon_s^3}\omega^2$ (0,1)

Exercice 1 : (5 pts)

1. L'équation de Schrödinger du mouvement de cet électron :

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\Psi}{dx^2} = E\Psi \qquad (1pt)$$

avec les conditions $\Psi(0) = \Psi(L) = 0$ (0.25pt)

2. Le niveau d'énergie :

$$E = E_n = \frac{\hbar^2\pi^2 n^2}{2mL^2} = \left(\frac{h^2}{2m}\right)\left(\frac{n}{2L}\right)^2 \qquad (1pt)$$

3. les trois premiers niveaux énergétiques :

Pour n =1 : $E_1 = \frac{\hbar^2\pi^2}{2mL^2}$ (0,5pt)

Pour n =2 : $E_2 = \frac{4\,\hbar^2\pi^2}{2mL^2} = 4\,E_1$ (0,5pt)

Pour n =3 : $E_3 = \frac{9\,\hbar^2\pi^2}{2mL^2} = 9\,E_1$ (0,5pt)

4. Le niveau d'énergie de Fermi :

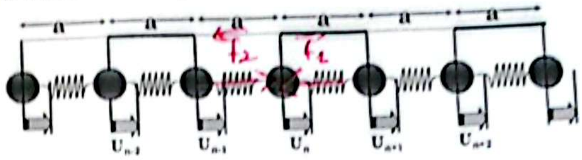
Chaque niveau d'énergie n est occupé seulement par deux électrons de spin +1/2 et -1/2, à cause du principe d'exclusion de Pauli. (0.25pt)

Soit N le nombre d'atomes sur la longueur L. Supposons N pair. Il y a donc N électrons de valence qui peuvent remplir les niveaux d'énergie depuis n = 1 jusqu'à n = n_F tel que $2n_F = N$

$$E_F = \left(\frac{h^2}{2m}\right)\left(\frac{n_F}{2L}\right)^2 = \left(\frac{h^2}{2m}\right)\left(\frac{N}{4L}\right)^2 \qquad (1pt)$$

Exercice 2 : (10 pts)

1. Les équations de mouvements par U_n



1

$F_1 = - C\,(U_n - U_{n+1})$

$F_2 = - C\,(U_n - U_{n-1})$ 0,5

Principe de Newton : $\sum F = m\,\gamma$

$\gamma = d^2U_n/dt^2$ 0,5

$m\, d^2U_n/dt^2 = - C\,(U_n - U_{n+1}) - C\,(U_n - U_{n-1})$ 0,5

$m\, d^2U_n/dt^2 = - C\,U_n + C\,U_{n+1} - C\,U_n + C\,U_{n-1}$

$m\, d^2U_n/dt^2 = - 2\,C\,U_n + C\,(U_{n+1} + U_{n-1})$

$\mathbf{m\, d^2U_n/dt^2 + 2\,C\,U_n - C\,(U_{n+1} + U_{n-1}) = 0}$ (I.1) 1

2. **La relation de dispersion des modes de vibration**

$U_n = U_0 \exp i(kna - \omega t)$

Où : $\omega = 2\pi f$: la pulsation ; $x_n = ka$: la position de l'atome n ; t : le temps ; k : vecteur d'onde.

Pour n-1 : $U_{n-1} = U_0 \exp i(k(n-1)a - \omega t)$

$= U_n \exp -ika$ (I.2)

Pour n-1 : $U_{n+1} = U_0 \exp i(k(n+1)a - \omega t)$

$= U_n \exp ika$ (I.3) 0,75

Pour trouver ω on calcule d^2U_n/dt^2 :

$$\frac{d^2U_n}{dt^2} = \left[\frac{d}{dt}(U_n)\right] = \frac{d}{dt}\left[-iU_0\omega e^{i(kna-\omega t)}\right]$$

$$= i^2U_0\omega^2 e^{i(kna-\omega t)}$$

$$= -\omega^2\,U_n \qquad (I.4)$$

remplaçant (I.2), (I.3), (I.4) dans l'équation (I.1) on trouve :

$-m\omega^2\,U_n + 2CU_n - C(U_ne^{ika} - U_ne^{-ika}) = 0$

$-m\omega^2\,U_n + 2CU_n - CU_n(e^{ika} - e^{-ika}) = 0$

$e^{ika} - e^{-ika} = 2\cos ka$

$-m\omega^2 + 2C - 2C\cos ka = 0 \;\rightarrow\; -m\omega^2 + 2C\,(1 - \cos ka) = 0$ 1

On suppose que $x = ka/2 \rightarrow -m\omega^2 + 2C\,(1 - \cos 2x) = 0$

$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x) \rightarrow \sin^2 ka/2 = \frac{1}{2}(1 - \cos ka) \rightarrow 1 - \cos ka = 2\sin^2 ka/2$

$-m\omega^2 + 2C\,(2\sin^2 ka/2) = 0 \rightarrow m\omega^2 = 4C\sin^2 ka/2$

Donc : $\omega^2 = 4\,\frac{C}{m}\,sin^2\frac{ka}{2} \;\rightarrow\; \omega = 2\sqrt{\frac{C}{m}}\left|\sin\frac{ka}{2}\right|$ la relation de dispersion 1

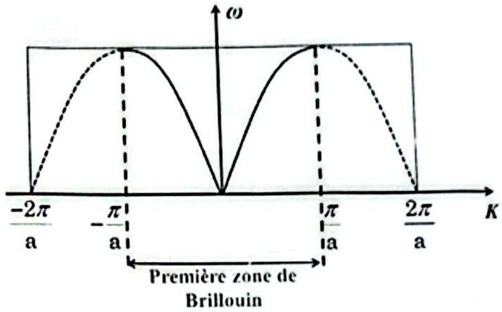
3. Etude de ω = f(k)

$$\omega = 2\sqrt{\frac{C}{m}}\left|\sin\frac{ka}{2}\right|$$

$-1 \leq \sin ka/2 \leq 1$ donc $\sin -\pi/2 \leq \sin ka/2 \leq \sin \pi/2$ alors $-\pi/2 \leq ka/2 \leq \pi/2$

donc $-\pi/a \leq k \leq \pi/a$ 1ére zone de Brillouin 1

si $k = 0 \rightarrow \omega = 0$ et $k = \pm\,\pi/a \rightarrow \omega = 2\sqrt{\frac{C}{m}}$



1,5

Figure : variation de ω = f(k)

4. Vitesse de groupe :

La vitesse de propagation d'un phonon dans le réseau qui correspond notamment à la vitesse de propagation du son dans un solide est donnée par la relation :

$$V_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{d}{dk}\left(2\sqrt{\frac{C}{m}}\left|\sin\frac{ka}{2}\right|\right)$$

$$V_g = 2\sqrt{\frac{C}{m}}\,\frac{a}{2}\left|\cos\frac{ka}{2}\right|$$

$$V_g = a\sqrt{\frac{C}{m}}\left|\cos\frac{ka}{2}\right|$$ 1

$V_g = v_s\left|\, cos\; ka/2\right|$ Où v_s : est la vitesse du son dans un solide $\left(v_s = a\sqrt{\frac{C}{m}}\right)$

2,5