وزارة التعليم العالي و البحث العلمي
كلية العلوم الاقتصادية و التجارية و علوم التسيير

جامعة الشاذلي بن جديد –الطارف-
قسم الجذع المشترك

التاريخ: 2025/01/21 المدة: 1 سا 30 د

امتحان السداسي الأول في مقياس الرياضيات

التمرين الأول: (06 نقاط)

لتكن A،B،C ثلاثة أجزاء من المجموعة E .

1. بسط الأعداد التالية ثم أذكر أصغر مجموعة ينتمي إليها.

$$\frac{0,25}{3,5} \quad , \quad \frac{14}{5\sqrt{49}} \quad , \quad \frac{32}{6} - \frac{19}{3} \quad , \quad \frac{-10\prod}{-5} \quad , \quad \frac{2}{\sqrt{2}+1} - 2\sqrt{2}$$

2. أكتب بالتفصيل المجموعة E حيث: $E = \{x \in \mathbb{N} \,/\, |2x-3| \leq 2\}$

3. بين أن : $(A \cap B) \cap (\overline{A \cap C}) = A \cap B \cap \bar{C}$

التمرين الثاني: (07 نقاط)

(u_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي:

$$\begin{cases} u_0 = \frac{1}{2} \\ u_{n+1} = \frac{2u_n+1}{u_n+2} \end{cases}$$

1. بين أنه من أجل كل n من $\mathbb{N}$ $\quad 0 < u_n < 1$
2. أدرس رتابة (u_n)
3. بين أن المتتالية متقاربة ثم استنتج نهايتها
4. نعتبر $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المتتالية المعرفة بـــــ: : $v_n = \frac{u_n-1}{u_n+1}$

1. بين أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها q و حدها الأول v_0
2. أ. أكتب عبارة v_n بدلالة n ثم u_n بدلالة n؛
3. أحسب نهاية (v_n) ثم أوجد نهاية (u_n)

التمرين الثالث: (07 نقاط)

1. أدرس تقارب السلسلتين التاليتين باستخدام اختبار المقارنة: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n+n^n}{5^n-2^n}$ 2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$ 1.

2. أحسب مشتقة الدالة: $f(x) = \left(\frac{4x-1}{x+2}\right)^3$.

3. أحسب المشتقات الجزئية من الرتبة الأولى للدالة: $f(x) = \sqrt{1+x^2y^2}$.

4. أدرس استمرارية الدالة f عند $x_0 = 2$ حيث:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2x+1}{7-3x}, & x \leq 2 \\ \frac{x^2+x-6}{x-2}, & x > 2 \end{cases}$$

بالتوفيق للجميع

تاريخ الامتحان: 2025/01/21 السنة الدراسية:2024-2025

التصحيح النموذجي لامتحان السداسي الأول في مقياس الرياضيات

التمرين الأول: (06 نقاط)

1. تبسيط الأعداد التالية و ذكر أصغر مجموعة تنتمي إليها: .....(2,5 نقطة)

1) $\frac{0.25}{3.5}=\frac{0.25\times100}{3.5\times100}=\frac{25}{350}=\frac{25\div25}{350\div25}=\frac{1}{14}\in\mathbb{Q}$

2) $\frac{14}{5\sqrt{49}}=\frac{14}{5\sqrt{7^2}}=\frac{2\times7}{5\times7}=\frac{2}{5}\in\mathbb{D}$

3) $\frac{32}{6}-\frac{19}{3}=\frac{32\div2}{6\div2}-\frac{19}{3}=\frac{16}{3}-\frac{19}{3}=\frac{-3}{3}=-1\in\mathbb{Z}$

4) $\frac{-10\Pi}{-5}=2\Pi\in\mathbb{R}$

5) $\frac{2}{\sqrt{2}+1}-2\sqrt{2}=\frac{2(\sqrt{2}-1)}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)}-2\sqrt{2}=\frac{2\sqrt{2}-2}{2-1}-2\sqrt{2}=2\sqrt{2}-2\sqrt{2}-2=-2\in\mathbb{Z}$

2. كتابة E بالتفصيل:..... (2,5 نقطة)

المجموعة: $E=\{x\in\mathbb{N}\ /\ |2x-3|\leq 2\}$

تعني $|2x-3|\leq 2 \quad -2\leq 2x-3\leq 2$

بإضافة 3 للطرفين: $1\leq 2x\leq 5$

بقسمة الأطراف على 2 $\frac{1}{2}\leq x\leq\frac{5}{2}$

$x\in\mathbb{N}$ يعني $x=2$ أو $x=1$

إذن $E=\{1\ ;2\}$

3. إثبات أن : $(A\cap B)\cap(\overline{A\cap C})=A\cap B\cap\overline{C}$ .....(1 نقطة)

$$x\in(A\cap B)\cap(\overline{A\cap C})\Leftrightarrow x\in(A\cap B)\wedge x\in(\overline{A\cap C})$$
$$\Leftrightarrow(x\in A\wedge x\in B)\wedge x\notin(A\cap C)$$
$$\Leftrightarrow(x\in A\wedge x\in B)\wedge(x\notin A\vee x\notin C)$$
$$\Leftrightarrow(x\in A)\wedge(x\notin A\vee x\notin C)\wedge(x\in B)\wedge(x\notin A\vee x\notin C)$$
$$\Leftrightarrow\boxed{(x\in A\wedge x\notin A)\vee}(x\in A\wedge x\notin C)\wedge\boxed{(x\in B\wedge x\notin A)\vee}(x\in B\wedge x\notin C)$$
$$\Leftrightarrow(x\in A\wedge x\notin C)\wedge(x\in B\wedge x\notin C)$$
$$\Leftrightarrow(x\in A\wedge x\in\bar{C})\wedge(x\in B\wedge x\in\bar{C})$$
$$\Leftrightarrow x\in A\wedge x\in B\wedge x\in\bar{C}$$
$$\Leftrightarrow x\in A\cap B\cap\bar{C}$$

ومنه فإن: $(A\cap B)\cap(\overline{A\cap})=A\cap B\cap\bar{C}$ صحيحة.

التمرين الثاني: (07 نقاط)

لكل n من $\mathbb{N}$, $u_0=\frac{1}{2}$, $u_{n+1}=\frac{2u_n+1}{u_n+2}$

1. إثبات من أجل كل n من $\mathbb{N}$ $0<u_n<1$ ..... (2 نقطة)

الخطوة الأولى: التحقق من صحة p(0) $0<u_0=\frac{1}{2}<1$ و منه p(0) صحيحة

الخطوة الثانية: إثبات أنه إذا كانت $0<u_n<1$ فإن $0<u_{n+1}<1$

لدينا: $u_{n+1}=\frac{2u_n+1}{u_n+2}$

بقسمة $2u_n+1$ على u_n+2 نجد: $2u_n+1=2(u_n+2)-3$ ثم بقسمة الطرفين على u_n+2 نجد:

$$\frac{2u_n+1}{u_n+2}=2-\frac{3}{u_n+2}=u_{n+1}$$

$$0<u_n<1$$
$$2<u_n+2<3$$
$$\frac{1}{3}<\frac{1}{u_n+2}<\frac{1}{2}$$
$$-\frac{3}{2}<-\frac{3}{u_n+2}<-\frac{3}{3}$$
$$2-\frac{3}{2}<2-\frac{3}{u_n+2}<2-\frac{3}{3}$$
$$0<\frac{1}{2}<2-\frac{3}{u_n+2}<1$$

إذن : $0<u_{n+1}<1$ و منه $0<u_n<1$ لكل n من $\mathbb{N}$

2. دراسة رتابة (u_n) ..... (1 نقطة)

نحسب الفرق $u_{n+1}-u_n$

$$u_{n+1}-u_n=\frac{2u_n+1}{u_n+2}-u_n=\frac{2u_n+1-u_n^2-2u_n}{u_n+2}=\frac{1-u_n^2}{u_n+2}$$

بما أن $0<u_n<1$ حسب البرهان بالتراجع فإن $1-u_n^2>0$ و $u_n+2>0$

و منه $u_{n+1}-u_n>0$ و بالتالي فإن (u_n) متزايدة.

3. **استنتاج نهايتها**: بما أن (u_n) متزايدة و محدودة $0<u_n<1$ فإنها متقاربة و تنتهي إلى الواحد. **(0,5 نقطة)**

4. : $v_n=\frac{u_n-1}{u_n+1}$

1 إثبات أن (v_n) هندسية: ..... (1,5 نقطة)

$$v_{n+1}=\frac{u_{n+1}-1}{u_{n+1}+1}=\frac{\frac{2u_n+1}{u_n+2}-1}{\frac{2u_n+1}{u_n+2}+1}=\frac{\frac{2u_n+1-u_n-2}{u_n+2}}{\frac{2u_n+1+u_n+2}{u_n+2}}=\frac{u_n-1}{3u_n+3}=\frac{1}{3}\left(\frac{u_n-1}{u_n+1}\right)=\frac{1}{3}v_n$$

و منه (v_n) هندسية أساسها $q=\frac{1}{3}$ و حدها الأول : $v_0=\frac{u_0-1}{u_0+1}=\frac{1-2}{1+2}=\frac{-1}{3}$

2 – كتابة عبارة الحد العام لـ v_n و الحد العام لـ u_n ..... (1 نقطة)

$$v_n=-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^n$$

$$u_n=\frac{1+v_n}{1-v_n}=\frac{1-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^n}{1+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^n}=\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1+\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}$$

3 حساب نهاية v_n و u_n: ..... (1 نقطة)

$$\lim_{n\to\infty} v_n = \lim_{n\to\infty} -\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^n = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1+\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}} = 1$$

التمرين الثالث: (07 نقاط)

1. دراسة تقارب السلسلتين التاليتين باستخدام اختبار المقارنة:..... (2 نقطة)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n + n^n}{5^n - 2^n}$$

حدها العام: $u_n = \frac{3^n+n^n}{5^n-2^n}$ ، نختار السلسلة الهندسية $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{5^n}$ المتقاربة لأن أساسها $-1 < q = \frac{3}{5} < 1$

إذن نقول أن السلسلة المفروضة متقاربة

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$$

هذه السلسلة متقاربة لأنها أصغر من سلسلة ريمن المتقاربة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ لأن $\alpha = 2 > 1$

2. **حساب مشتقة الدالة:..... (1,5 نقطة)** $f(x) = \left(\frac{4x-1}{x+2}\right)^3$ *sa dérivée est:* $f'(x) = 3\left(\frac{9}{(x+2)^2}\right)\left(\frac{4x-1}{x+2}\right)^2$

3. **حساب المشتقات من الدرجة الأولى للدالة :** $f(x,y) = \sqrt{1+x^2y^2}$ **.....(1,5 نقطة)**

$$f_x = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \frac{xy^2}{\sqrt{1+x^2y^2}}, \qquad f_y = \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \frac{x^2y}{\sqrt{1+x^2y^2}}$$

4. دراسة استمرارية الدالة f عند $x_0=2$.....(2 نقطة)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2x+1}{7-3x}, & x \le 2 \\ \frac{x^2+x-6}{x-2}, & x > 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} f(2) = \frac{2\times 2+1}{7-3\times 2} = 5 \\ \lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} \frac{2x+1}{7-3x} = 5 \\ \lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} \frac{x^2+x-6}{x-2} = \lim_{x\to 2^+} \frac{(x+3)(x-2)}{x-2} = 5 \end{cases}$$

إذن: $\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^+} f(x) = f(2)$

و منه فالدالة f مستمرة عند $x_0=2$.